73b | 2 Carnot

<36611338640014

<36611338640014

Bayer. Staatsbibliothek

Geometrie der telllung

oder

ber die Anwendung der Analysis auf Geometrie

von

L. N. M. Carnot
iede des Nationalinstituts, der Gesellschaft der Wissenschaften zu Dijon u. s. w.

übersetzt

von

H. C. Schumacher
rordentlichem Professor der Astronomie zu Kopenhagen.

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΚΑΘΑΡΜΑΤΑ ΨΥΧΗΣ.

Zweyter Theil.

Mit 6 Kupfern.

Altona,
bey J. F. Hammerich.
1810.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
Mün

Vorrede.

zweyte Theil der Geometrie der Stellung
t aufser dem, was von dem Hauptwerke
nicht überfetzt war, das Mémoire über
ıtfernungen 5 beliebig im Raume ange-
ener Punkte, und die Theorie der Trans-
n. Beydes habe ich auf Verlangen des
ers beygefügt.

ıs Mémoire enthält eine vollftändige
lung der dreyeckigten Pyramide, For-
die freylich nicht zur numerifchen Auf-
gefchickt find, indeffen, wenn dies
rt würde, in den meiften Fällen, durch
ıungen gefchmeidig gemacht werden
.

Theorie der Transverfalen hätte eigent-
das Hauptwerk verwebt werden follen,
hielt ich es für unbefcheiden, eine
zu übernehmen, die der Verfaffer (fo
es aus einem Briefe) fich felbft vor-

t meiner Anmerkungen, die ich füg-
erdrücken kann, um nicht zu wieder-
was fchon von dem Recenfenten in

den Heidelberger Jahrbüchern gesagt ist, ich dem Werke Zusätze gegeben, von ich die meisten der freundschaftlichen Gü Herrn Professor Gauss verdanke.

Es wäre thörigt, was dem Geor Deutschlands zugehört, namentlich ben zu wollen — deutlich genug ist des sters Stempel auch Seinen Erhohlunger gedrückt — nur für die, welche den scheuen, der die Suchenden auf eine m Arbeiten führen könnte, bemerke ich, d II, V, VI, VII, von Ihm sind.

Ehe ich schliesse, muss ich den Vo des Setzers oder Correctors rügen, der am des ersten Theils, statt der Worte:

„sonst habe ich nur folgende erheb
„Schreib - und Druckfehler bemerkt:"

sich unterfing

„sonst habe ich nur folgende erheb
„Schreibfehler bemerkt;"

abzudrucken, auch gegen meine, und me Herrn Verlegers Erinnerung fortfuhr, das die Stelle des c zu setzen. Ein flüchtiger auf das Verzeichniss der Fehler zeigt, wie darunter Druckfehler sind.

Altona, d. 22. Jun. 1810.

Schumacher

Vierter Abſchnitt.

...iffe, die in einem Syſtem von graden Linien ohne ...riſche Funktionen gefunden werden können. Tri- ...iſche Unterſuchungen über Figuren, die in einer ...der auf der Fläche der Kugel gezogen ſind; ver- ...iedene Eigenſchaften der Vielecke, und der Polyeder.

...on oben haben wir bemerkt, daſs goniome- ...nktionen nur, um Winkel mit Linien ver- ...u können, erfunden ſind. Man muſste Mit- ...ten, weder Winkel, noch Linien, ſuchen, ...eyde heterogene Theile einen Maaſsſtab zur ...ng zu haben. Dieſe Mittelquantitäten nun ...ie Zahl der Theile des Durchmeſſers aus, ...e Sehne enthält, auf der ein in dem Um- ...riebener Winkel ſteht, nach der Zahl der ...elben Umkreiſes, die der Bogen enthält kel miſst, ſo daſs die Rechn... ...bſtrakter Zahlen zu...

Ebendaher folgt, dafs ihr Gebrauch nur
nothwendig wird, wenn man den Werth eines
kels aus dem Werthe einer oder mehrerer Linien,
umgekehrt, finden soll. Mein Vorsatz hier ist,
Fälle zu untersuchen, wo die Gegebenen so besch
sind, dafs man die Winkel ohne Linien, die Li
ohne Winkel finden kann. Das Interessante d
Aufgabe liegt darin, dafs die Rechnung mit goni
trischen Funktionen, theoretisch genommen, nu
Näherungsrechnung betrachtet werden darf.

Der allgemeine Grundsatz hierbey ist:

In jeder Figur, die allein mit Lineal u
Zirkel construirt werden kann, ol
den eingetheilten Kreis zu gebrauch
können alle Linien ohne Dazwisch
kunft der Winkel berechnet werd
im Gegentheil in jeder Figur, die all
durch Lineal und den eingetheilt
Kreis entworfen wird, ohne den Z
kel zu gebrauchen, können alle Wink
ohne Hülfe der Linien berechnet we
den. So kann man im ersten Fall al
Seiten der Figur, im zweyten Fall al
ihre Winkel erhalten, ohne goniom
trische Funktionen zu gebrauchen.

Es ist nemlich klar, dafs man das Resultat grap
scher Operationen auch durch Schlüsse aus den Geg
benen erhalten kann. Nun sind im ersten Fall al
Gegebenen, Linien, im zweyten, Winkel.

188. Wir wollen annehmen, man kenne keine
Winkel einer Figur, hingegen habe man unter de

n oder Lineärquantitäten genug Gegebene, um
s alle übrigen Lineärquantitäten zu bestimmen.
wird man jede durch die Regeln der Trigono-
e finden, indem man erst durch Gleichungen, die
hen Seiten und Winkeln der Figur bestehenden
ltnisse ausdrückt, dann durch Algebra diese Glei-
en verbindet, um diejenigen Unbekannten, die
winden sollen, zu eliminiren. Nach der An-
sind in diesem Fall alle Angulärquantitäten
nnte, sie müssen also aus der Endgleichung für
er gesuchten Lineärquantitäten verschwinden,
ese Endgleichung kann nur Lineärquantitäten
en. Eben diese will ich direkt, ohne Dazwi-
nft der Angulärquantitäten suchen, die doch
ch nur eine Nebenrolle bey der Rechnung
indem man sie, nachdem sie eingeführt sind,
e wieder wegschaffen muss, um das gesuchte
zu erhalten.

nt man keine Linie der Figur, aber genug
um daraus die andern bestimmen zu kön-
tritt dasselbe Verfahren, nur umgekehrt, ein.
st mein Zweck, besonders die Verhältnisse zu
die unter den Linien einer Figur von der
nd unter den Winkeln derselben Figur von
rn Seite bestehen. Ich habe schon zum Theil
rachtungen zu meinem Briefe an Bossut (hin-
ı Geometrie) bekannt gemacht, hier erhalten
ıehr Entwickelung.

t wollen wir Winkel ohne Linien be-

Vier und zwanzigste Aufgabe.

189. Drey grade Linien sind in einer El ne gezogen, man kennt die Winkel, welc die Richtungen zweyer von ihnen, mit d Richtung des dritten machen, und soll d Winkel finden, den die Richtungen d beyden ersten mit einander machen.

Wir wollen, wenn es nöthig ist, die 3 Lini verlängern, bis sie ein Dreyeck bilden. Man sie leicht, dafs jeder Winkel dieses Dreyecks entwed einem der Winkel gleich ist, den die beyden Richtu gen bilden, die sich in seinem Scheitelpunkte durc schneiden, oder dessen Supplement. Diefs erfährt ma gleich aus den Richtungen, die durch die Anordnun der Buchstaben, die sie bezeichnen, angezeigt sin (87.) Setzt man also die Summe dieser 3 Wink $= 2\pi$, und setzt in diese Gleichung für jeden ent weder den Winkel der sich durchschneidenden Rich tungen oder dessen Supplement, so erhält man di Gleichung des ersten Grades, die den gesuchten Win kel giebt.

Es sollen z. B. die Richtungen der 3 Linien $\overline{mn}$, $\overline{pq}$, $\overline{rs}$ (Fig. 65. 66.) seyn, man kennt die Winkel $\overline{mn}\hat{\ }\overline{rs}$, $\overline{pq}\hat{\ }\overline{rs}$, und sucht $\overline{mn}\hat{\ }\overline{pq}$.

Ich betrachte das Dreyeck ABC, das durch die 3 Richtungen gebildet wird, und sehe,

1) dafs der Winkel $B\hat{A}C = \overline{mn}\hat{\ }\overline{pq}$, also der gesuchte ist;

2) dafs der Winkel $A\hat{B}C$ das Supplement von

Winkel $n\hat{B}C$ iſt, den die Richtung $\overline{mn}$, mit der
ung $\overline{rs}$ bildet; alſo

$$A\hat{B}C = 2\pi - \overline{mn}\,\hat{}\,\overline{rs};$$

) endlich, daſs $A\hat{C}B$ der Scheitelwinkel von $s\hat{C}q$
o $A\hat{C}B = \overline{pq}\,\hat{}\,\overline{rs}$.

araus erhält man

$$= \overline{mn}\,\hat{}\,\overline{pq} + 2\pi - \overline{mn}\,\hat{}\,\overline{rs} + \overline{pq}\,\hat{}\,\overline{rs} \text{ oder}$$

$\overline{mn}\,\hat{}\,\overline{pq} = \overline{mn}\,\hat{}\,\overline{rs} - \overline{pq}\,\hat{}\,\overline{rs}$, was man fin-
llte.

o. Durch einen Punkt A in der Ebene der 3 gege-
Richtungen, wollen wir für jede eine Parallel-
ehen, und die in demſelben Sinn geht. Iſt dieſs
en, ſo erkennt man leicht den Ausdruck des
en Winkels, in Werthen der beyden andern,
n wird ſehen, daſs er nothwendig immer,
er die Summe dieſer beyden andern, oder
ferenz, oder die Summe ihrer Supplemente
ſs.

3 Richtungen ſollen (Fig. 67. 68. 69.) $\overline{AB}$,
ſeyn, $B\hat{A}C$ ſey der geſuchte Winkel. Hier
älle möglich:

Venn die Linie $\overline{AD}$ (Fig. 67.) in $B\hat{A}C$ gezo-
dann iſt die Summe der beyden andern
, $\overline{AC}\,\hat{}\,\overline{AD}$.

Venn $\overline{AD}$ nicht ſelbſt, aber ihre Verlänge-
D' in $B\hat{A}C$ gezogen iſt (Fig. 68.), dann iſt
$B\hat{A}D' + CAD'$ d. h. gleich der Summe der
nte der beyden andern Winkel.

Venn weder $\overline{AD}$ noch $\overline{AD'}$ in $B\hat{A}C$ gehen

ſchied der beyden gegebenen Winkel. Daraus
ſich alſo im Allgemeinen ableiten

Erſter Lehrſatz.

Die Winkel, welche durch die Ri
tungen dreyer graden Linien in ei
Ebene gebildet werden, ſind ſo, daſs
der von ihnen entweder der Summe
beyden andern gleich iſt, oder ihrem U
terſchiede, oder der Summe ihrer Su
plemente.

191. Wir wollen uns nun irgend ein Syſtem
graden Linien vorſtellen, die in einer Ebene gezo
ſind. Man ſoll in dieſer Ebene noch eine neue gr
Linie oder Transverſale ziehen, die alle andern ſchn
det, und alle Winkel kennen, die durch die Ri
tung dieſer Transverſale, und durch die Richtung
der andern graden Linien des Syſtems gebildet w
den: dann verlangt man die Winkel zu kennen,
aus der Combination zweyer Richtungen dieſer g
den Linien entſtehen können.

Hier muſs man nach der Reihe alle Dreyecke
trachten, die von der Transverſale, und je zwey d
andern Linien des Syſtems gebildet werden, ſo find
man wie bey der vorigen Aufgabe den Winkel, d
die Richtungen der beyden letzten Linien bilden.

Derſelbe Fall träte ein, wenn die Winkel gegeb
ſind, welche eine feſte Transverſale mit den Richtu
gen der Seiten eines Vielecks bildet, und man d
Winkel des Vielecks ſucht. Betrachtet man hier d

ck, das die feste Grundlinie (die Transversale) zwey auf einander folgende Seiten des Vielecks , so findet man wie vorher den eingeschlosse- Vinkel.

)2. Hat man n grade Linien in einer Ebene, so sie, zu zweyen genommen $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Winkel, ıan die 4, welche durch den Durchschnitt r Linien entstehen, nur für einen rechnet. iesen $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Winkeln sollen $n-1$ von ein- ınabhängige bekannt seyn, (also keine Scheitel- , Supplemente, 3 Winkel in einem Dreyecke,) d man immer alle anderen, ohne goniometri- ınktionen anzuwenden, durch blosse Additio- d Subtraktionen finden können. Dazu braucht ır unbestimmt alle diese Linien zu verlängern, len Dreyecken, die aus ihrem Durchschnitt entste- ldet man vermöge des Satzes, dass alle 3 Win- Rechten gleich sind, soviel unabhängige Glei- ı, als man braucht, um die Zahl $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ machen.

enbar sind alle diese Gleichungen vom ersten

. Daraus folgt, dass, wenn in 2 correlativen , wovon jede n grade Linien hat, $n-1$ Win- zeln genommen einander gleich sind, auch die correspondirenden Winkel dieser Figuren ein- leich seyn werden.

Diese Bemerkung dient, um leicht eine zahlrei
Classe von Aufgaben aufzulösen, die ein Gegenst
der Anwendung der Algebra auf Geometrie sind. M
soll hier nemlich graphische Verrichtungen finden,
gewissen Bedingungen Genüge leisten. Sind diese B
dingungen so einfach, dass man leicht durch Synt
sis allein die gesuchte Figur construiren kann, so
darf man nicht der analytischen Hülfsmittel. Al
kann man die Figur selbst nicht construiren, wo
aber eine ähnliche, so wäre es leicht die Aufgabe a
die vorige zurückzubringen, denn aus der ähnlich
Figur findet man die Verhältnisse der Linien in d
gesuchten Figur. Man braucht also nur eine zu ke
nen, um alle andern zu haben. Eine muss man ab
wenigstens bey jeder Aufgabe kennen.

194. Man soll z. B. ein Quadrat in einem geg
benen Dreyecke beschreiben. *ABC* (Fig. 70. 71.) s
das gegebene Dreyeck, *MNOP* das gesuchte Quadra
Obgleich ich nicht unmittelbar die Figur *ABCMNO*
beschreiben kann, die den Bedingungen Genüge le
stet, so kenne ich doch alle ihre Winkel, weil nac
der Annahme $\overline{MN}$ parallel mit, und $\overline{MO}$, $\overline{NP}$ senk
recht auf der graden gegebnen Linie $\overline{BC}$ sind. D
ich nun auch aus den Bedingungen der Aufgab
weiss, dass $\overline{MO} = \overline{OP}$, so kann ich offenbar ein
Figur beschreiben, die der gesuchten ähnlich ist, un
die durch blosse Proportionen die Theile der gesuch
ten giebt.

Eben so würde man verfahren, wenn die einzu
schreibende Figur kein Quadrat, sondern z. B. irgend
ein gegebenes Viereck *MOPK* wäre, auch wenn man

Würfel in einer Triangularpyramide beſchrei-
llte.

ir kommen im 5. Abſchnitte auf mehrere ſolche
en zurück.

. Wenn man in einer Figur genug Winkel kennt,
andern daraus ohne goniometriſche Funktio-
beſtimmen, und in dieſer Figur neue Linien
oder ſenkrecht auf die urſprünglichen zieht,
man eben ſo die neuen dadurch entſtandenen
ohne goniometriſche Funktionen, (nach 190.)
Das wäre aber nicht der Fall, wenn man
en zöge; die ſo entſtandenen Winkel müſſen
ülfe goniometriſcher Funktionen gefunden
Daher nimmt man bey Auflöſung goniome-
ufgaben durch Algebra, ſoviel als möglich
inien parallel oder ſenkrecht auf die urſprüng-
veil man ſo die neuentſtandenen Winkel den
annten gleich hat.
g von den Winkeln, die ohne Hülfe der Li-
nden werden, wir wollen jetzt zu den Linien
e man ohne Hülfe der Winkel beſtimmen

Man ſtelle ſich ein Syſtem von graden, in
ne gezogenen Linien vor. Wir wollen an-
daſs man, ohne einen Winkel zu kennen,
n graden Linien, oder den Segmenten, die
Durchſchnitten entſtehen, genug Gegebene
jeden Theil der Figur beſtimmen zu kön-
iellt, daſs alle anderen Linien und Segmente
ohne Hülfe der Winkel zu finden ſind,

weil ſie, ohne daſs dieſe Winkel gegebne waren,
ſtruirt wurden.

Es kommt alſo nur darauf an, ſie in jedem
ſondern Falle zu finden. Wir wollen bey dem D
ecke der einfachſten Figur anfangen.

BGA (Fig. 72.) ſey ein beliebiges Dreyeck.
dem Scheitel B eines der Winkel ziehe man
Transverſale $\overline{BC}$ nach einem gegebenen Punkte C
Grundlinie. Man verlangt den Werth dieſer D
$\overline{BC}$ ohne Winkel in die Rechnung zu ziehen,
man bey der Conſtruktion keinen Winkel braucht

Ich ſenke aus B das Perpendikel $\overline{Bm}$ auf
und aus A das Perpendikel $\overline{An}$ auf $\overline{BG}$. Dann g
das rechtwinklichte Dreyeck BCm

$$\overline{BC}^2 = \overline{Bm}^2 + \overline{Cm}^2 = \overline{Bm}^2 + (\overline{Gm} - \overline{GC})^2 = \overline{Bm}^2 + \overline{Gm}^2 + \overline{GC}^2 - 2\,\overline{Gm}.\overline{GC}$$

da nun $\overline{Bm}^2 + \overline{Gm}^2 = \overline{BG}^2$ ſo wird daraus

$$\overline{BC}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{GC}^2 - 2\,\overline{Gm}.\overline{GC} \quad \text{(A)}$$

Es iſt auch $\overline{BA}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 - 2\,\overline{Gn}.\overline{BG}$

Die ähnlichen Dreyecke AGn, BGm geben

$$\overline{GA} : \overline{Gn} = \overline{BG} : \overline{Gm} \text{ oder } \overline{GA}.\overline{Gm} = \overline{Gn}.\overline{BG}$$

daher

$$\overline{BA}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 - 2\,\overline{GA}.\overline{Gm} \quad \text{(}$$

Multiplicirt man nun die Gleichung (A) du
$\overline{GA}$, und die Gleichung (B) durch $\overline{GC}$, und zi
dieſe von der erſten ab, ſo erhält man nach
duktion

$$\overline{BC}^2.\overline{GA} = \overline{BG}^2.\overline{CA} + \overline{BA}^2.\overline{GC} - \overline{GA}.\overline{GC}.\overline{AC} \quad \text{(C)}$$

vidirt man mit $\overline{GA}$, so kann man daraus den
von $\overline{BC}$ ziehen. So erhalten wir den folgen-
tz.

Zweyter Lehrsatz.

jedem Dreyecke, wenn man aus dem
tel eines Winkels, eine Transver-
uf die gegenüberstehende Grundli-
lbst, nicht auf ihre Verlängerung
ist das Quadrat dieser Transversale,
licirt durch die Grundlinie, gleich
mme der Quadrate der beyden an-
eiten, von denen jedes mit dem ge-
erstehenden Segment der Grundli-
ltiplicirt ist, weniger der Grund-
it dem Produkt ihrer beyden Seg-
multiplicirt.

s ist der Hauptlehrsatz bey solchen Unter-
en.

ein Beyspiel zu geben, mag die Transversale
$\overline{A}$ in der Mitte schneiden, so ist $\overline{CG} = \overline{CA}$
. Die Formel giebt also

$$4\overline{BC}^2 = 2\overline{BG}^2 + 2\overline{AB}^2 - \overline{GA}^2$$

ilt die Transversale $\overline{BC}$ den Winkel $G\hat{B}A$ in
Theile, so verhalten sich bekanntlich die
e der Grundlinie, wie die umliegenden Sei-

$$\overline{CA} \cdot \overline{GB} = \overline{CG} \cdot \overline{BA}.$$

t man diesen Werth in die Formel (C), so er-

$$\overline{BC}^2 . \overline{GA} = \overline{CG} . \overline{BA} . (\overline{BG} + \overline{B}$$
$$\overline{GA} . \overline{CG} . \overline{AC}$$

Aber die vorige Proportion giebt auch

$$\overline{CG} + \overline{CA} \text{ oder } \overline{GA} : \overline{CG} = \overline{GB} + \overline{BA}$$

Zieht man hieraus den Werth von $\overline{CG}$ und ſtituirt ihn zu der Gleichung, ſo erhält man di kannte Formel

$$\overline{GA} . \overline{BC}^2 = \overline{GB} . \overline{BA} - \overline{CG} . \overline{CA}$$

197. Im Dreyecke ABC (Fig. 73.) ſey der kel $B\hat{A}C$ durch den Transverſale $\overline{AH}$ in 2 gle Theile getheilt, ſo hat man

$$\overline{BH} : \overline{CH} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

Nun ſey $\overline{AH'}$ ſenkrecht auf $\overline{AH}$, ſo ſieht leicht, daſs man auch

$$\overline{BH'} : \overline{CH'} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

hat, alſo iſt

$$\overline{BH} : \overline{CH} = \overline{BH'} : \overline{CH'}$$

198. Nach (196.) hat man

$$\overline{AH}^2 = \overline{AB} . \overline{AC} - \overline{BH} . \overline{CH}$$

dagegen hat man

$$\overline{AH'}^2 = \overline{BH'} . \overline{CH'} - \overline{AB} . \overline{AC}$$

Es iſt nemlich nach (196.)

$$\overline{AC}^2 . \overline{BH'} = \overline{AB}^2 . \overline{CH'} + \overline{AH'}^2 . \overline{BC}$$
$$\overline{BH'} . \overline{CH'} . \overline{BC}$$

Setzt man nun in das erſte Glied dieſer G chung für $\overline{BH'}$, $\frac{\overline{CH'}.\overline{AB}}{\overline{AC}}$ und verſetzt, ſo hat ma

$$\overline{CH'} . \overline{AB} (\overline{AC} - \overline{AB}) + \overline{BH'} . \overline{CH}$$
$$\overline{BC} = \overline{AH'}^2 . \overline{BC}$$

Aus der vorigen Proportion

$$\overline{BH'} : \overline{CH'} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

nan

$$\overline{BH'} - \overline{CH'} : \overline{CH'} = \overline{AB} - \overline{AC} : \overline{AC}$$

$$I' = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB} - \overline{AC}}$$

ubſtitution dieſes Werthes von $\overline{CH'}$ und Di-
ıit BC erhält man endlich

$$\overline{AH'}^2 = \overline{BH'} \cdot \overline{CH'} - \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

Addirt man $\overline{AH}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC} - \overline{BH} \cdot \overline{CH}$

$$\overline{AH'}^2 = \overline{BH'} \cdot \overline{CH'} - \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

ın $AH^2 + \overline{AH'}^2$ d. h. $\overline{HH'}^2 = \overline{BH'} \cdot \overline{CH'} -$
$\overline{BH} \cdot \overline{CH}$.

$\overline{AH'}$ iſt auf $\overline{AH}$ ſenkrecht angenommen,
ıan alſo über $\overline{HH'}$ als Durchmeſſer einen
ſchreibt (Fig. 74.), ſo geht er durch den
Alſo umgekehrt, wenn man über einer
nie $\overline{HH'}$ einen Kreis beſchreibt, und aus ir-
m Punkte A, mit dieſem Umkreiſe die Li-
$\overline{AH'}$ zieht, dann die Winkel $B\hat{A}H = C\hat{A}H$
ſind die Punkte B, C, ſo beſtimmt, daſs

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BH} : \overline{CH} = \overline{BH'} : \overline{CH'}.$$

Sind alſo 2 feſte Punkte, oder Brennpunkte
ɔen, und man ſucht den geometriſchen Ort
te, deren Entfernungen zu dieſen beyden
gegebenem Verhältniſſe ſind, ſo würde man
e Genüge leiſten, wenn man erſt die Linie
ı gegebenen Verhältniſſe in H theilte, dann
längerung dieſer Linie, einen andern Punkt
ſo daſs $\overline{BH'}$, $\overline{CH'}$ auch in demſelben Ver-
iren. Der Kreis über $\overline{HH'}$ wird dann
e geometriſche Ort ſeyn.

Offenbar haben alle Punkte einer Kugel, $\overline{HH'}$ zum Durchmesser hat, dieselbe Eigenschaft.

202. Weil $B\hat{A}H = C\hat{A}H$, so ist der Uml HAH', auch der geometrische Ort aller Punkte, wie A die Eigenschaft haben, dass, wenn man ihnen nach den 3 festen Punkten B, H, C, die Li $\overline{AB}$, $\overline{AH}$, $\overline{AC}$ zieht, der Winkel $B\hat{A}H$ immer $=$ C bleibt, oder mit andern Worten, dass der Wi $B\hat{A}C$ immer durch die Linie $\overline{AH}$ in zwey gle Theile getheilt wird.

203. Ich kehre zum Lehrsatz (196) zurück.

Wir haben, um die gesuchte Transversale $\overline{BC}$ finden, keine goniometrische Funktionen gebrau denn alle Gegebenen waren Linien, und so wa unnöthig, Winkel in die Rechnung zu bringen.

Doch war es möglich, und in den meisten Fä ist es sogar bequemer. So haben wir aus den kannten Eigenschaften des Dreyecks

$$\overline{BC}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{GC}^2 - 2\,\overline{BG}\,.\,\overline{GC}\,.\,cos\ B$$

$$\overline{BA}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 - 2\,\overline{AG}\,.\,\overline{BG}\,.\,cos\ I$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $\overline{GA}$, andere mit $\overline{GC}$, so kommt man nach leichten Redu nen auf das vorige Resultat.

204. Man übersieht leicht, dass, wenn der P C, ausserhalb G in C' fällt, $\overline{GC}$ invers wird, so wenn er ausserhalb A in C'' fällt, wird invers.

205. Die Formel enthält die 3 Seiten des Drey und die zwey Segmente der Grundlinie, von d man eins eliminiren kann, wenn man dafür

linie weniger dem andern ſetzt, es läſst ſich
rnach folgende Aufgabe löſen:

ind von den 3 Seiten eines Dreyecks,
r Transverſale aus dem einen Win-
l auf die gegenüberſtehende Seite,
d den beyden Segmenten dieſer Seite
nabhängig von einander gegeben,
n ſoll die beyden Unbekannten fin-
.

wir können durch denſelben Gang die allge-
Aufgabe löſen, wo die Transverſale ſtatt aus
inkel aus irgend einem andern Punkte gezo-
l.

Fünf und zwanzigſte Aufgabe.

Wenn von den 6 Seiten, aus denen
ecke beſtehen, die einen gemein-
chen oder gleichen Winkel haben,
5 gegeben ſind, die 6te zu finden.

beyden Dreyecke, die einen gemeinſchaftli-
kel haben, ſollen BGA, DGC ſeyn (Fig. 72.).
ollen wir auf GC das Perpendikel $\overline{Dm'}$, und
Perpendikel $\overline{An}$ ſenken.

echtwinklichte Dreyeck DCm' giebt

$$^2 = \overline{Dm'}^2 + \overline{Cm'}^2 = \overline{Dm'}^2 + (\overline{GC} - \overline{Gm'})^2$$

$$= \overline{Dm'}^2 + \overline{Gm'}^2 + \overline{GC}^2 - 2\,\overline{Gm'}\,.\,\overline{GC}$$

$\overline{Dm'}^2 + \overline{Gm'}^2$, $\overline{DG}^2$ geſetzt

$$\overline{DC}^2 = \overline{DG}^2 + \overline{GC}^2 - 2\,\overline{Gm'}\,.\,\overline{GC} \qquad (A.)$$

o hat man

$$\overline{BA}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 - 2\,\overline{GB}\,.\,\overline{Gn}$$

Nun ist aber aus den ähnlichen Dr
DGm', AGn

$$\overline{Gn} = \frac{\overline{GA} \cdot \overline{Gm'}}{\overline{DG}}$$

also

$$\overline{BA}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 - 2\,\frac{\overline{GA} \cdot \overline{Gm'} \cdot \overline{G}}{\overline{DG}}$$

Multiplicirt man (A) mit $\overline{GA} \cdot \overline{BG}$. und
$\overline{DG} \cdot \overline{GC}$, um $\overline{Gm'}$ zu eliminiren, so erhält m
gesuchte Gleichung, welche nur die 6 Seiten de
ecke enthält

$$(\overline{BG}^2 + \overline{GA}^2 - \overline{BA}^2) \cdot \overline{GD} \cdot \overline{GC} = ($$
$$\overline{GC}^2 - \overline{DC}^2) \cdot \overline{GB} \cdot \overline{GA}.$$

207. Da $\overline{AC} = \overline{GA} - \overline{CA}$, $\overline{BD} = \overline{GB}$ -
so werden die Segmente $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ bekannt seyn,
die 6 andern Quantitäten des Systems bekann
und umgekehrt, wenn diese beyden Quantität
3 von den ersten bekannt sind, findet man die
durch die beyden vorhergehenden Gleichungen
durch die vorhergefundene Formel. Sind also
haupt in einem Dreyecke, das durch eine Tr
sale geschnitten wird, 5 von den 8 dabey vo
menden Linien gegeben, die aber unabhängi
einander seyn müssen, so kann man die 3
durch die vorige Formel finden.

208. Ist $B\hat{G}A = 180° - B\hat{G}C$ so hat man

$$(\overline{BG}^2 + \overline{GA}^2 - \overline{BA}^2) \cdot \overline{GD} \cdot \overline{GC} = ($$
$$\overline{DG}^2 - \overline{GC}^2) \cdot \overline{GB} \cdot \overline{GA}.$$

209. Nach den Grundsätzen, die wir über
lation aufgestellt haben, sieht man leicht, dass
vers würde, wenn C ausserhalb von G in C'

s man folglich in der vorigen Formel in die-
e $-\overline{GC}$ ſtatt $+\overline{GC}$ ſehen müſste. Im Ur-
ämlich hat man

$$\overline{GC} = \overline{GA} - \overline{CA}$$

formten $\overline{GC'} = \overline{C'A} - \overline{GA}$

n aber C auſserhalb A nach C'' fiele, ſo
$\overline{A}$ invers werden, und folglich müſste man
$-\overline{CA}$ ſetzen.

ſo wenn der Punkt D, ſtatt zwiſchen B
u fallen, auſserhalb G in D' fiele, würde
rs werden (alſo $-DG$ ſtatt DG), fiele er
B in G'', ſo würde $\overline{BD}$ invers werden,
ch wäre da nichts zu verändern, weil $\overline{BD}$
die Formel kommt.

n zugleich C in C', D in D' fiele, ſo müſste
eich

$-\overline{GC}$ für $\overline{GC}$

$-\overline{DG}$ für $\overline{DG}$ ſetzen,

D', und C in C'', ſo würde man $-\overline{DG}$
$\overline{A}$, ſtatt $\overline{DG}$ und $\overline{CA}$ zu ſetzen haben

Es ſeyen, um ein Beyſpiel zu geben, zwey
ABD, ACD (Fig. 75.) in demſelben Kreiſe
n, und deren Grundlinie dieſelbe Sehne $\overline{AD}$

$$A\hat{C}D = A\hat{B}D$$

ben wir

$$\overline{D}^2 - \overline{AD}^2) \cdot \overline{CA} \cdot \overline{CD} = (\overline{CA}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{AD}^2).$$

$\overline{D}$. alſo

$$\overline{AD}^2 = \frac{(\overline{AB}.\overline{AC}-\overline{BD}.\overline{CD}).(\overline{AC}.\overline{BD}-\overline{AB}.\overline{CD}}{\overline{AB}.\overline{BD}-\overline{AC}.\overline{CD}}$$

Zieht man $\overline{BC}$, so haben die Dreyeck BDC, eine gemeinschaftliche Grundlinie B man hat

$$\overline{BC}^2 = \frac{(\overline{AB}.\overline{BD}-\overline{AC}.\overline{CD})(\overline{AC}.\overline{BD}-\overline{AB}.\overline{CD}}{\overline{AB}.\overline{AC}-\overline{BD}.\overline{CD}}$$

Kennt man also in dem eingeschriebenen die beyden Diagonalen und 2 entgegengesetz ten, so hat man unmittelbar die beyden Seiten.

211. Diese Formeln sind nur auf das *ABCD* (Fig. 75.) anwendbar, aber man kann s auf das Viereck (Fig. 76.) anwendbar machen, man sich vorstellt, dafs in der ersten Figur der *D* sich gegen *C* längst der Peripherie bewege, über *C* hinaus gekommen ist. Dann wird $\overline{CD}$ und man braucht nur für *CD*, — *CD* zu setz erhält man

$$\overline{AD}^2 = \frac{(\overline{AB}.\overline{AC}+\overline{BD}.\overline{CD})(\overline{AC}.\overline{BD}+\overline{AB}.\overline{CD})}{\overline{AB}.\overline{BD}+\overline{AC}.\overline{CD}}$$

$$\overline{BC}^2 = \frac{(\overline{AB}.\overline{BD}+\overline{AC}.\overline{CD}).(\overline{AC}.\overline{BD}+\overline{AB}.\overline{CD})}{\overline{AB}.\overline{AC}+\overline{BD}.\overline{CD}},$$

woraus man die beyden Diagonalen des eingesc nen Vierecks finden kann, wenn man die 4 kennt.

212. Nach gehörigen Reduktionen erhält m

$$\overline{AD}.\overline{BC} = \overline{AC}.\overline{BD} + \overline{AB}.\overline{CD} \ldots (E)$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{BD} \cdot \overline{CD}}{\overline{AB} \cdot \overline{BD} + \overline{AC} \cdot \overline{CD}} \ldots (F)$$

nte Formeln.

m das, was ich über eingeſchriebene Vierecke 'ielecke zu ſagen habe, vollſtändig zu machen, hier zwey dahin gehörige Sätze ſtehen.

Dritter Lehrſatz.

5. In jedem eingeſchriebenem Vierverhalten ſich die beyden Segmente Diagonale, wie die Produkte aus den enden Seiten.

'DC (Fig. 76.) ſey das Viereck, H der Durchunkt der beyden Diagonalen, es ſoll alſo

$\overline{AH} : \overline{DH} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} : \overline{BD} \cdot \overline{DC}$ ſeyn,

's folgt auch leicht, wenn man die beyden nen

$\overline{AH} : \overline{CH} = \overline{AB} : \overline{CD}$

$\overline{CH} : \overline{DH} = \overline{AC} : \overline{BD}$

der multiplicirt.

r Satz kann unmittelbar auf jedes der einnen Vierecke $ABDC$, $ABCD$, $ACDB$ anwerden, da ſie correlativ ſind, und der Satz Gleichung führt, die nur aus 2 Gliedern bech (47) iſt eine ſolche unmittelbar auf alle Syſteme anwendbar. So giebt das Viereck ſſen Diagonalen AC, BD und Durchſchnitts-

$\overline{AG} : \overline{CG} = \overline{AB} \cdot \overline{AD} : \overline{BC} \cdot \overline{CD}$

kann alſo auch den Lehrſatz ſo ausdrücken;

Im eingeſchriebenen Vierecke ver
ſich die beyden Segmente auf jed
te, die bis dahin verlängert iſt,
die gegenüberſtehende trift, zu
der, wie die reſpektiven Produk
der anliegenden Seite und Diago

Da $\overline{AH} : \overline{DH} = \overline{AB} . \overline{AC} : \overline{BD} .$

iſt auch

$\overline{AH} + \overline{DH}$ oder $\overline{AD} : \overline{AH} = \overline{AB}$
$\overline{BD} . \overline{CD} : \overline{AB} . \overline{AC}$

oder $$\overline{AH} = \overline{AD} . \frac{\overline{AB} . \overline{AC}}{\overline{AB} . \overline{AC} + \overline{BD} . \overline{C}}$$

Auf ähnliche Art folgt

$$\overline{AG} = \overline{AC} . \frac{\overline{AB} . \overline{AD}}{\overline{AB} . \overline{AD} - \overline{BC} . \overline{C}}$$

214. Hat man alſo irgend ein eingeſchr
Vieleck (Fig. 77.), und kennt man alle ſeine
und Diagonalen, ſo findet man durch den
Satz, alle Segmente auf dieſen Diagonalen, u
den unbeſtimmt verlängerten Seiten.

Soll man z. B. Bq finden, ſo betrachtet m
Viereck $ABDE$, worin alles bekannt iſt. Wi
$\overline{mq}$ haben, ſo ſucht man erſt $\overline{Bq}$, und dann $\overline{B}$
dem Vierecke $ABCE$, und man erhält

$$\overline{Bq} - \overline{Bm} = \overline{mq}$$

R ſoll der Halbmeſſer des Kreiſes ſeyn, ſo
wir (121)

$$\overline{AE} = 2 R . \sin \tfrac{1}{2} \widehat{AE}$$
$$\overline{AB} = 2 R . \sin \tfrac{1}{2} \widehat{AB} \text{ u. ſ. w.}$$

…an kann alſo auch alle Segmente durch den …eſſer des Kreiſes und Kreisfunktionen aus… …n.

Vierter Lehrſatz.

…. Es ſey (Fig. 78.) *BCDEFG* ein ein…riebenes Vieleck. Aus einem will…ch im Umkreiſe angenommnen Punk…vollen wir zu den beyden nächſten …ln *G*, *B*, die Sehnen $\overline{AG}$, $\overline{AB}$ ziehen,

$$\ldots = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}.\overline{AC}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}.\overline{AD}} + \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}.\overline{AE}} + \frac{\overline{EF}}{\overline{AE}.\overline{AF}} + \frac{\overline{FG}}{\overline{AF}.\overline{AG}}$$

… dem Punkte *B* ziehe ich die Diagonalen …, $\overline{BF}$, dann giebt das Viereck *ABCD*

$$\ldots\overline{AC} \,.\, \overline{BD} = \overline{BC} \,.\, \overline{AD} + \overline{AB} \,.\, \overline{CD}$$

… $\overline{AB} \,.\, \overline{AC} \,.\, \overline{AD}$ dividirt

$$\frac{\ldots\overline{D}}{\ldots\,.\,\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB} \,.\, \overline{AC}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{AC} \,.\, \overline{AD}}$$

…nan eben ſo mit den Vierecken *ABDE*, *ABEF*, … ſo erhält man folgende Gleichungen:

$$\frac{\ldots\overline{D}}{\ldots\,.\,\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB} \,.\, \overline{AC}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{AC} \,.\, \overline{AD}}$$

$$\frac{\ldots\overline{E}}{\ldots\,.\,\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB} \,.\, \overline{AD}} + \frac{\overline{DE}}{\overline{AD} \,.\, \overline{AE}}$$

$$\frac{\ldots\overline{F}}{\ldots\,.\,\overline{AF}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB} \,.\, \overline{AE}} + \frac{\overline{EF}}{\overline{AE} \,.\, \overline{AF}}$$

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{AB}\,.\,\overline{AG}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{AB}\,.\,\overline{AF}}+\frac{\overline{FG}}{\overline{AF}\,.\,\overline{AG}}$$

Addirt man diese Gleichungen und zerst... gleichen Glieder, so erhält man den gesuchten... satz, der nur eine Erweiterung der bekannt... genschaft eingeschriebener Vierecke ist, auf... beruht.

216. Der Durchmesser des Kreises sey =...

$$\widehat{AB}=2a$$
$$\widehat{ABC}=2b$$
$$\widehat{ABCD}=2c$$
$$\widehat{ABCDE}=2d$$
$$\widehat{ABCDEF}=2e \text{ u. s. w.}$$

so haben wir

$$\widehat{BC}=2(b-a)$$
$$\widehat{CD}=2(c-b)$$
$$\widehat{DE}=2(d-c)$$
$$\widehat{EF}=2(e-d) \text{ u. s. w.}$$

aus (122) ist

$$\overline{AB}=\sin a$$
$$\overline{AC}=\sin b$$
$$\overline{AD}=\sin c \text{ u. s. w}$$

die Gleichung des vorigen Satzes verwandel... also in

$$\frac{\sin(f-a)}{\sin a\,.\,\sin f}=\frac{\sin(b-a)}{\sin a\,.\,\sin b}+\frac{\sin(c-b)}{\sin b\,.\,\sin c}+\frac{\sin(\ldots}{\sin c\ldots}$$
$$+\frac{\sin(e-d)}{\sin d\,.\,\sin e}+\frac{\sin(f-e)}{\sin e\,.\,\sin f}$$

eine Formel, die schon (139) gefunden ward.

a diese Gleichung für jeden Werth von a statt
, so kann man für a, b, c, d u. s. w. $\pi - a$,
$\pi - c$, $\pi - d$ u. s. w. setzen, dann kommt

$$\frac{(f-a)}{.\cos f} = \frac{\sin (b-a)}{\cos a . \cos b} + \frac{\sin (c-b)}{\cos b . \cos c} + \text{u. s. w.}$$

7. Man kann also allgemein schliessen, wie auch
nkt A auf $\overset{\frown}{BG}$ liegen mag, dass
jedem eingeschriebenen Vieleck
CDEFG, die Summe der Quotienten je-
r Seite, durch das Produkt der bey-
n Linien, die von einem Punkte des
ıkreises A nach den Endpunkten ge-
gen werden, immer dieselbe bleibt,
› auch der Punkt A sey, wenn er nur
alle Seiten des Vielecks derselbe
und man die Seite $\overline{BG}$, die ih-
Rückseite nach A dreht, negativ
ımt.

Wir kommen auf unsere allgemeine Theorie
(Fig. 72.) Ich verlängere die Transversale
sie in F die Seite des Dreyecks schneidet
nehme mir vor, die Verhältnisse aufzufinden,
:hen den Linien des neuen Systems bestehen,
wie man sieht, die Vereinigung von 4 gra-
en $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ ist, d. h. ein vollstän-
reck ohne Diagonalen.

ziehe ich durch einen Winkel B des Drey-
A die Linie $\overline{Bb}$, parallel der gegenüberstehen-
, und verlängere sie bis zur Transversale
Punkte b. Dann erhalte ich

$$\overline{Bb} : \overline{GC} = \overline{BD} : \overline{DG}$$
$$\overline{AC} : \overline{Bb} = \overline{AF} : \overline{BF}$$
alſo $$\overline{AF} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{GC} = \overline{AC} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{GD}.$$

Wir ſind zu dieſer Formel gekommen, oh gonometriſche Funktionen zu gebrauchen, indeſſe man auch ſehr leicht durch ſie daſſelbe erhalten

Unſere Gleichung überſetzt heiſst:

Fünfter Lehrſatz.

219. Man ſchneide die 3 Seiten e Dreyecks (verlängert, wenn es nöthi durch eine Transverſale; dann ſind 6 Segmente je zwey auf jeder Seite, ſchen dem Winkel, der die Seite begr und der Transverſale ſo beſchaffen: das Produkt dreyer unter ihnen dem dukt der 3 andern gleich iſt, wenn nur die Faktoren ſo wählt, daſs nie z in demſelben Produkt vorkommen, denſelben Winkel des Dreyecks, oder ſelben Punkt der Transverſale zu punkten haben.

Der Satz iſt allgemein, und eben ſo wahr, die Transverſale auſserhalb des Dreyecks geht, nur die verlängerten Seiten ſchneidet (Fig. 79 81. 82.).

220. Weil das allgemeine Syſtem aus 4 L beſteht, die in derſelben Ebene gezogen ſind, weil dieſe 4 Linien, zu Dreyen genommen, ein D

lden, deſſen Transverſale die 4te iſt, ſo giebt allgemeinen Syſtem 4 Dreyecke

BGA
BFD
FCA
DGC

lche man den vorigen Lehrſatz anwenden kann, alſo 4 correlative Syſteme bilden, auf die man die des Urſyſtems unmittelbar anwenden kann. Ich mittelbar; denn da die Formel nur 2 Glieder hat, man keine Zeichenveränderung vorzunehmen. r erhalten alſo gleich folgende Correlation der ktion (Fig. 72. 79. 80. 81. 82.)

1. Syſtem . . *BGADFC*
2. — *BFDAGC*
3. — *FCADBG*
4. — *DGCBFA*

ndet man alſo die gefundene Formel auf jedes ommt

$$\overline{AF} \,.\, \overline{BD} \,.\, \overline{GC} = \overline{AC} \,.\, \overline{BF} \,.\, \overline{GD}$$
$$\overline{DG} \,.\, \overline{BA} \,.\, \overline{FC} = \overline{DC} \,.\, \overline{BG} \,.\, \overline{FA}$$
$$\overline{AB} \,.\, \overline{FD} \,.\, \overline{CG} = \overline{AG} \,.\, \overline{FB} \,.\, \overline{CD}$$
$$\overline{CF} \,.\, \overline{DB} \,.\, \overline{GA} = \overline{CA} \,.\, \overline{DF} \,.\, \overline{GB}$$

4te Formel folgt ohnedem ſchon aus den

Fügt man zu dieſen 3 Gleichungen nach 4:

$$\overline{BG} = \overline{BD} + \overline{GD}$$
$$\overline{BA} = \overline{FA} - \overline{FB}$$
$$\overline{GA} = \overline{GC} + \overline{CA}$$
$$\overline{CD} = \overline{CF} - \overline{FD}$$

ſo hat man die 7 nöthigen Gleichungen, um
vorgelegten Figur von den 12 Linien 7 zu
wenn die 5 andern unabhängig von einande
ben ſind. Dieſe Figur iſt nun, wie wir beme
ben, ein vollſtändiges Viereck ohne ſeine D
len; alſo giebt der Lehrſatz (219.) die Auflöſu
gender Aufgabe:

Wenn von den 12 Linien, aus dene
vollſtändiges Viereck ohne Diago
beſteht, irgend 5 von einander u
hängige gegeben ſind, die 7 unbek
ten zu finden.

222. Durch Multiplication leitet man aus
Formeln folgende ab:

$$\overline{BA}.\overline{BD}.\overline{CF}.\overline{CG}=\overline{BF}.\overline{BG}.\overline{CA}.\overline{CD}$$
$$\overline{AF}.\overline{AG}.\overline{DB}.\overline{DC}=\overline{AB}.\overline{AC}.\overline{DF}.\overline{DG}$$
$$\overline{GB}.\overline{GC}.\overline{FA}.\overline{FD}=\overline{GA}.\overline{GD}.\overline{FB}.\overline{FC}$$

die man auch in folgende Proportionen verwa
kann:

$$\overline{BF}.\overline{BG}:\overline{CF}.\overline{CG}=\overline{BA}.\overline{BD}:\overline{CA}.\overline{CD}$$
$$\overline{AB}.\overline{AC}:\overline{DB}.\overline{DC}=\overline{AF}.\overline{AG}:\overline{DF}.\overline{DG}$$
$$\overline{GA}.\overline{GD}:\overline{FA}.\overline{FD}=\overline{GB}.\overline{GC}:\overline{FB}.\overline{FC}$$

die alle 3 dieſelbe Eigenſchaft ausdrücken, die
für das gewöhnliche Viereck *BDCA*, die zweyte
das Viereck *AFDB* mit einwärts gehendem Wi
und die dritte für das Viereck *GCFB*, das zwey
gegengeſetzte Dreyecke bildet, man kann alſo fol
den Lehrſatz daraus ableiten:

Sechster Lehrsatz.

n jedem einfachen Viereck verhält das Produkt der beyden Entfernun- on einem Winkel zu dem Punkte, wo eiten, die von diesem Winkel ausge- die gegenüberstehenden Seiten tref- zu dem Produkt der beyden Entfer- en, des diagonal gegenüberstehenden els von eben diesen Punkten, wie rodukt der beyden dem ersten Winkel genden Seiten, zu dem Produkte der n andern.

5. Zieht man nun noch (Fig. 83. 84. 85.) die nalen $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{FG}$ des vollkommenen Vier- o sieht man leicht, daſs der vorige Satz auch edrückt werden kann:

edem vollkommenen Viereck, wenn n eine Diagonale zieht und die zwey fachen Vierecke vergleicht, denen se Diagonale gemein ist, verhält sich s Produkt der beyden Seiten eines ser Vierecke, die von einem End- nkte dieser Diagonale ausgehen, zum dukt der beyden andern Seiten des- ben Vierecks, wie das Produkt der den Seiten des andern Vierecks, die m andern Endpunkt der Diagonale sgehen, zum Produkt der beyden dern Seiten desselben Vierecks.

224. Wir wollen annehmen, daſs die Di
$\overline{AD}$ die beyden andern $\overline{BC}$, $\overline{FG}$ in den P
H, *K*, ſchneide, und die beyden Dreyecke *AFK*
vergleichen, die auf derſelben Diagonale *FG* g
ſind, und durch $\overline{AD}$ eine von der andern getrenn
von den Transverſalen $\overline{BG}$, $\overline{FC}$ geſchnitten w
Der Lehrſatz giebt uns folgende Gleichungen:

$$\overline{AB} \cdot \overline{DK} \cdot \overline{GF} = \overline{AD} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{GK}$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{GC} \cdot \overline{FK} = \overline{DK} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{GF}$$

Multiplicirt und reducirt man dieſe Gleich
ſo kommt

$$\overline{AB} \cdot \overline{FK} \cdot \overline{GC} = \overline{AC} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{GK}$$

d. h. folgender Lehrſatz:

Siebenter Lehrſatz.

Wenn man aus irgend einem Punk
der Ebene eines Dreyecks nach den 3
keln Linien oder Transverſalen zieht,
jede ſoweit verlängert, bis ſie die ge
überſtehende Seite trifft, ſo entſtehen
jeder Seite 2 Segmente. Das Produkt
dieſer Segmente iſt gleich dem Prod
der 3 andern, wenn man ſie nur ſo nim
daſs in einem Produkt nicht zwey zuſ
men kommen, die durch denſelben Wi
des Dreyecks, oder denſelben Punkt
Transverſale begränzt werden.

225. Wir wollen eine Anwendung auf das D
eck *BDA* machen, deſſen 3 Scheitelpunkte 3 Wi
des Vierecks *BDCA* ſind. Aus dem Punkte *C* zi

nach den Winkeln des Dreyecks die Transversalen
CD, CA, wir haben also

$$\overline{AF} \cdot \overline{BG} \cdot \overline{DH} = \overline{AH} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{DG}$$

Aber dasselbe Dreyeck, durch die Transversale
die durch keinen Winkel geht, geschnitten,

$$\overline{AK} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{DG} = \overline{AF} \cdot \overline{BG} \cdot \overline{DK}$$

plicirt und reducirt man, so kommt

$$\overline{AK} \cdot \overline{DH} = \overline{AH} \cdot \overline{DK} \text{ oder}$$

$$\overline{AH} : \overline{DH} = \overline{AK} : \overline{DK} \text{ d. h.}$$

Achter Lehrsatz.

n jedem vollständigen Viereck, das
3 Diagonalen hat, wird jede dieser
onalen von den beyden andern in pro-
onalen Segmenten geschnitten.

6. Die Flächen der Dreyecke *BAC*, *BDC*, die
meinschaftliche Grundlinie $\overline{BC}$ haben, verhalten
ie die Segmente der Diagonale, die die andern
lpunkte dieser Dreyecke verbindet, d. h.

$$\overline{\overline{ABC}} : \overline{\overline{DBC}} = \overline{AH} : \overline{DH}$$

en so hat man

$$\overline{AK} : \overline{DK} = \overline{\overline{AFG}} : \overline{\overline{DFG}}$$

ch dem vorigen Lehrsatz

$$\overline{\overline{ABC}} : \overline{\overline{DBC}} = \overline{\overline{AFG}} : \overline{\overline{DFG}}$$

Neunter Lehrsatz.

jedem vollständigen Viereck stehen
ächen der beyden Dreyecke, deren
nschaftlicher Scheitelpunkt der End-

punkt einer Diagonale ist, und
Grundlinien die beyden andern D
len sind, in demselben Verhältnis
die Flächen der beyden Dreyecke,
gemeinschaftlicher Scheitelpunkt
dere Ende der ersten Diagonale ist, u
sonst auf den nemlichen Grundlini
hen.

227. Das vollständige Viereck mit seinen
gonalen, das wir untersucht haben, giebt uns
wir es zerlegen, 11 vollständige Vierecke ohn
nalen d. h. 11 verschiedene Figuren, von de
aus 4 Linien besteht, die bis zu ihrem Zusamm
fen verlängert sind. Es sind nemlich im Ganzen
Linien gezogen, nemlich die 4 Seiten des
ABDC und seine 3 Diagonalen. Diese 7 Li
4en verbunden geben

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35 \text{ Verbindungen}$$

Wir würden also 35 Vierecke haben, wen
rere sich nicht zu dreyen unter denselben V
durchschnitten. Da nun ein solcher Durchschn
Zahl der Figuren um 4 vermindert und es 6
Durchschnitte giebt, so kommen 35 — 24 = 11
ren. Da nun aber jede dieser Figuren (vollst
Vierecke ohne Diagonalen) 3 einfache Viereck
schliesst, (103.) so schliesst das vollständige
eck mit seinen Diagonalen 33 einfache Vi
ein. Noch mehr: jedes der 11 vollständigen
ecke ohne Diagonalen giebt nach dem fünften
satze, aus dem alle andern (222, 223, 224, 225)

find, 4 Formeln; wir werden alſo 44 ganz ver-
ene Formeln haben, die alle auf das vollſtändige
k mit ſeinen 3 Diagonalen anwendbar ſind.

e folgende Tafel enthält die allgemeine Tafel
rrelation dieſer 33 Vierecke, und die 44 For-
Fig. 83. 84. 85.).

neine Tafel der Correlation der Con- ion unter 33 einfachen Vierecken, die llſtändige Viereck mit ſeinen 3 Dia- len begreift, nebſt den 44 Formeln des fünften Lehrſatzes.

Winkel des Urvierecks ſind durch A, B, D, C
et, und man nimmt an

$$\overline{AB} \cdot \overline{DC} \ddagger F$$
$$\overline{AC} \cdot \overline{DB} \ddagger G$$
$$\overline{AD} : \overline{BC} \ddagger H$$
$$\overline{AD} : \overline{FG} \ddagger K$$
$$\overline{BC} \cdot \overline{FG} \ddagger L$$

Viereck iſt erſt durch ſeine 4 Winkel, und
ch die Punkte bezeichnet, wo die gegenüber-
Seiten ſich ſchneiden.

	Vierecke	Formeln
n	$ABDCFG$	$\overline{AF}.\overline{BD}.\overline{GC} = \overline{AC}.\overline{BF}.\overline{GD}$
	$AFDGBC$	$\overline{AG}.\overline{CD}.\overline{FB} = \overline{AB}.\overline{CG}.\overline{FD}$
	$BFCGAD$	$\overline{BG}.\overline{DC}.\overline{FA} = \overline{BA}.\overline{DG}.\overline{FC}$
		$\overline{CF}.\overline{DB}.\overline{GA} = \overline{CA}.\overline{DF}.\overline{GB}$

	Vierecke	Formeln
2tes System	*FGCBLA*	$\overline{FL}.\overline{GC}.\overline{AB} = \overline{FB}.$
	FLCAGB	$\overline{FA}.\overline{BC}.\overline{LG} = \overline{FG}.$
	GLBAFC	$\overline{GA}.\overline{CB}.\overline{LF} = \overline{GF}.$
		$\overline{BL}.\overline{CG}.\overline{AF} = \overline{BF}.$
3tes System	*FDHBCA*	$\overline{FC}.\overline{DH}.\overline{AB} = \overline{FB}.$
	FCHADB	$\overline{FA}.\overline{BH}.\overline{CD} = \overline{FD}.$
	DCBAFH	$\overline{DA}.\overline{HB}.\overline{CF} = \overline{DF}.$
		$\overline{BC}.\overline{HD}.\overline{AF} = \overline{BF}.$
4tes System	*FKDBGA*	$\overline{FG}.\overline{KD}.\overline{AB} = \overline{FB}.$
	FGDAKB	$\overline{FA}.\overline{BD}.\overline{GK} = \overline{FK}.$
	KGBAFD	$\overline{KA}.\overline{DB}.\overline{GF} = \overline{KF}.$
		$\overline{BG}.\overline{DK}.\overline{AF} = \overline{BF}.$
5tes System	*LGDCFB*	$\overline{LF}.\overline{GD}.\overline{BC} = \overline{LC}.$
	LFDBGC	$\overline{LB}.\overline{CD}.\overline{FG} = \overline{LG}.$
	GFCBLD	$\overline{GB}.\overline{DC}.\overline{FL} = \overline{GL}.$
		$\overline{CF}.\overline{DG}.\overline{BL} = \overline{CL}.$
6tes System	*GCHDAB*	$\overline{GA}.\overline{CH}.\overline{BD} = \overline{GD}.$
	GAHBCD	$\overline{GB}.\overline{DH}.\overline{AC} = \overline{GC}.$
	CADBGH	$\overline{CB}.\overline{HD}.\overline{AG} = \overline{CG}.$
		$\overline{DA}.\overline{HC}.\overline{BG} = \overline{DG}.$
7tes System	*GCDKAF*	$\overline{GA}.\overline{CD}.\overline{FK} = \overline{GK}.$
	GADFCK	$\overline{GF}.\overline{KD}.\overline{AC} = \overline{GC}.$
	CAKFGD	$\overline{CF}.\overline{DK}.\overline{AG} = \overline{CG}.$
		$\overline{KA}.\overline{DC}.\overline{FG} = \overline{KG}.$

	Vierecke	Formeln
	LKDCFH	$\overline{LF}.\overline{KD}.\overline{HC} = \overline{LC}.\overline{KF}.\overline{HD}$
ystem	*LFDHKC*	$\overline{LH}.\overline{CD}.\overline{FK} = \overline{LK}.\overline{CH}.\overline{FD}$
	KFCHLD	$\overline{KH}.\overline{DC}.\overline{FL} = \overline{KL}.\overline{DH}.\overline{FC}$
		$\overline{CF}.\overline{DK}.\overline{HL} = \overline{CL}.\overline{DF}.\overline{HK}$
	FKHBLA	$\overline{FL}.\overline{KH}.\overline{AB} = \overline{FB}.\overline{KL}.\overline{AH}$
stem	*FLHAKB*	$\overline{FA}.\overline{BH}.\overline{LK} = \overline{FK}.\overline{BA}.\overline{LH}$
	KLBAFH	$\overline{KA}.\overline{HB}.\overline{LF} = \overline{KF}.\overline{HA}.\overline{LB}$
		$\overline{BL}.\overline{HK}.\overline{AF} = \overline{BF}.\overline{HL}.\overline{AK}$
	LGDHKB	$\overline{LK}.\overline{GD}.\overline{BH} = \overline{LH}.\overline{GK}.\overline{BD}$
tem	*LKDBGH*	$\overline{LB}.\overline{HD}.\overline{KG} = \overline{LG}.\overline{HB}.\overline{KD}$
	GKHBLD	$\overline{GB}.\overline{DH}.\overline{KL} = \overline{GL}.\overline{DB}.\overline{HK}$
		$\overline{HK}.\overline{DG}.\overline{BL} = \overline{HL}.\overline{DK}.\overline{BG}$
	KGCHLA	$\overline{KL}.\overline{GC}.\overline{AH} = \overline{KH}.\overline{GL}.\overline{AC}$
em	*KLCAGH*	$\overline{KA}.\overline{HC}.\overline{LG} = \overline{KG}.\overline{HA}.\overline{LC}$
	GLHAKC	$\overline{GA}.\overline{CH}.\overline{LK} = \overline{GK}.\overline{CA}.\overline{LH}$
		$\overline{HL}.\overline{CG}.\overline{AK} = \overline{HK}.\overline{CL}.\overline{AG}$

ſe Formeln ſind ohne irgend eine Zeichenver-
g auf jedes vollſtändige Viereck anwendbar,
e 3 Diagonalen hat. Was auch ſonſt immer
ſtalt ſeyn mag, weil alle dieſe Formeln nur
r haben. (47.)

Wir wiederholen die Lehrſätze (V, VI, VII,
in folgendem Satze.

eyen *A*, *B*, *C*, *D* (Fig. 83, 84, 85.) 4 will-
in derſelben Ebene angenommene Punkte, von
ine 3 in einer graden Linie ſind. Wir wol-
nmen

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} \ddagger F$$
$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} \ddagger G$$
$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} \ddagger H$$
$$\overline{AD} \cdot \overline{FG} \ddagger K$$
$$\overline{BC} \cdot \overline{FG} \ddagger L$$

So hat man die 5 folgenden Formeln (2
220, 221, 222.)

1) . . . $\overline{AF}.\overline{BD}.\overline{GC} = \overline{AC}.\overline{BF}.\overline{GD}$

2) . . . $\overline{BA}.\overline{BD}:\overline{CA}.\overline{CD} = \overline{BF}.\overline{BG}:\overline{C}$

3) . . . $\overline{AB}.\overline{FK}.\overline{GC} = \overline{AC}.\overline{FB}.\overline{GK}$

4) . . . $\overline{AH}:\overline{DH} = \overline{AK}:\overline{DK}$.

5) . . . $\overline{\overline{ABC}}:\overline{\overline{AFG}} = \overline{\overline{DBC}}:\overline{\overline{DFG}}$.

229. Ich komme wieder auf die Theori
guren, die durch Transverſalen in verſchiede
tung geſchnitten ſind.

Es ſey (Fig. 87.) *ABC* ein beliebiges
Aus einem in der Ebene des Dreyecks wil
angenommenen Punkte *D* (gleich viel ob au
oder innerhalb des Dreyecks) wollen wir zu d
keln *A*, *B*, *C* die 3 Transverſalen

$$\overline{ADa}$$
$$\overline{BDb}$$
$$\overline{CDc}$$

ziehen, dann durch die Punkte *b*, *c*, die Tra
$\overline{bcp}$. Dieſe Linie mit den 6 vorhergehende
das vollſtändige Viereck der (Fig. 72.) mi
3 Diagonalen. Fügen wir nun noch zu dieſ
die beyden neuen Linien $\overline{abn}$, $\overline{acm}$, ſo erha
ein eingeſchriebenes Dreyeck *abc*.

Im Dreyecke *ABC* haben wir (223.)

$$\overline{Ac}.\overline{Ba}.\overline{Cb} = \overline{Ab}.\overline{Bc}.\overline{Ca}$$

Eben ſo (224.)

$$\overline{Bc}.\overline{An} = \overline{Ac}.\overline{Bn}$$
$$\overline{Ab}.\overline{Cm} = \overline{Cb}.\overline{Am}$$
$$\overline{Ca}.\overline{Bp} = \overline{Ba}.\overline{Cp}$$

us deren Multiplication

$$\overline{Am}.\overline{Bn}.\overline{Cp} = \overline{An}.\overline{Bp}.\overline{Cm} \quad \ldots \text{(A)}$$

ezeichnet man mit a', b', c', die Durchſchnitts-
e der Seiten $\overline{cb}$, $\overline{ca}$, $\overline{ab}$, mit den Transverſalen
b, $\overline{Cc}$, ſo giebt das Dreyeck *abc*

$$\overline{ac'}.\overline{ba'}.\overline{cb'} = \overline{ab'}.\overline{bc'}.\overline{ca'}$$

$$\overline{bp}.\overline{ca'} = \overline{cp}.\overline{ba'}$$
$$\overline{cm}.\overline{ab'} = \overline{am}.\overline{cb'}$$
$$\overline{an}.\overline{bc'} = \overline{bn}.\overline{ac'}$$

s deren Multiplication

$$\overline{an}.\overline{bp}.\overline{cm} = \overline{am}.\overline{bn}.\overline{cp} \quad \ldots \text{(B)}$$

und (B) folgt alſo

Zehnter Lehrſatz.

. Wenn aus einem Punkte (D) will-
ch in der Ebene eines Dreyecks
angenommen, man durch jeden Win-
ie Transverſale zieht, die bis zur
berſtehenden Seite verlängert wird,
enn man dieſe Durchſchnittspunkte
eyen verbindet, um ein Dreyeck
lem erſten eingeſchrieben, zu bil-
nn jede Seite dieſes eingeſchriebe-
eyecks verlängert, bis ſie die ge-

genüberſtehende Seite des umſchri
Dreyecks trifft (*in m, n, p*),

1) So bilden dieſe 3 Durchſchnitt
te, auf den Seiten des umſchri
Dreyecks, 6 Segmente, wovon d
dukt von 3, dem Produkt der an
gleich iſt, wenn man dieſe Pr
nur ſo beſtimmt, daſs in jede
kommen, die einen gemeinſchaf
Endpunkt haben.

2) Eben ſo bilden dieſe 3 Durchſc
punkte auf den Seiten des einge
benen Dreyecks 6 Segmente, von
daſſelbe gilt, was bey den Segn
des umſchriebenen Dreyecks gal

231. Jetzt nehme ich an, (Fig. 87.)
Punkte *a, b, c,* willkührlich auf den Seiten o
Verlängerungen der Seiten des Dreyecks *ABC*
men werden; alſo nicht, wie wir vorher an
in den Durchſchnitten der Seiten des Dreyeck
mit den Transverſalen, die von einem Punkte
gehen.

Dies angenommen giebt das Dreyeck *ABC*
die 3 Seiten des eingeſchriebenen Dreyecks $\overline{ab}$
geſchnitten

$$\overline{An}.\overline{Ba}.\overline{Cb} = \overline{Ab}.\overline{Bn}.\overline{Ca}$$
$$\overline{Ab}.\overline{Bc}.\overline{Cp} = \overline{Ac}.\overline{Bp}.\overline{Cb}$$
$$\overline{Ac}.\overline{Ba}.\overline{Cm} = \overline{Am}.\overline{Bc}.\overline{Ca}$$

Aus der Multiplication dieſer Formeln kon

$\overline{Ba}^2 . \overline{An} . \overline{Cm} . \overline{Cp} = \overline{Ca}^2 . \overline{Am} . \overline{Bn} . \overline{Bp}$

$\overline{Ab}^2 . \overline{Bn} . \overline{Cp} . \overline{Cm} = \overline{Cb}^2 . \overline{Bp} . \overline{An} . \overline{Am}$

$\overline{Ac}^2 . \overline{Cm} . \overline{Bn} . \overline{Bp} = \overline{Bc}^2 . \overline{Cp} . \overline{Am} . \overline{An}$

an kann viele ſolche Combinationen aus den
nen Formeln (228.) ziehn.

2. Dieſe Theorie wird noch allgemeiner, wenn
e Punkte a, b, c, nicht mehr auf den Seiten
eyecks ABC nimmt.

3C, abc (Fig. 88.) ſeyen zwey beliebige Drey-
ı derſelben Ebene beſchrieben. Wir wollen
iten verlängern, bis ſie ſich ſämmtlich in den
ı m, n, p auf $\overline{BC}$, m', n', p' auf $\overline{AC}$, m'', n'',
$\overline{AB}$ treffen, dann giebt uns das Dreyeck
9.)

$\overline{am} . \overline{bp} . \overline{cn} = \overline{an} . \overline{bm} . \overline{cp}$

$\overline{am'} . \overline{bp'} . \overline{cn'} = \overline{an'} . \overline{bm'} . \overline{cp'}$

$\overline{am''} . \overline{bp''} . \overline{cn''} = \overline{an''} . \overline{bm''} . \overline{cp''}$

$\overline{am} . \overline{am'} . \overline{am''} . \overline{bp} . \overline{bp'} . \overline{bp''} . \overline{cn} . \overline{cn'} . \overline{cn''} =$
$\overline{an} . \overline{an'} . \overline{an''} . \overline{bm} . \overline{bm'} . \overline{bm''} . \overline{cp} . \overline{cp'} . \overline{cp''}$

e Formel, die man ſo überſetzen kann:

Eilfter Lehrſatz.

Wenn zwey Dreyecke abc, ABC
3.) in derſelben Ebene beſchrieben
und man ihre Seiten bis zu den
chnittspunkten verlängert, dann
Produkt aus den 3 Segmenten bil-
die auf $\overline{ab}$ zwiſchen a und den
iten des Dreyecks ABC liegen;

2) Eben ſo das Produkt aus den 3 S
ten, die auf $\overline{bc}$ zwiſchen b u
3 Seiten des Dreyecks ABC liege

3) Eben ſo das Produkt aus den 3 S
ten, die auf $\overline{ca}$, zwiſchen c u
3 Seiten des Dreyecks ABC liege

So wird das Produkt aus dieſen 9
ren gleich ſeyn dem Produkte aus f
den 9 Faktoren:

1) den 3 Segmenten auf $\overline{ac}$, zwiſche
Punkte a und den 3 Seiten des
ecks ABC,

2) den 3 Segmenten auf $\overline{cb}$ zwiſc
und den 3 Seiten des Dreyecks A

3) den 3 Segmenten auf $\overline{ba}$ zwiſc
und den 3 Seiten des Dreyecks A

Da dieſs ſtatt finden muſs bey jeder L
Punkte a, b, c, ſo haben wir auch

$$\overline{Am'}.\overline{An'}.\overline{Ap'} \times \overline{Cm}.\overline{Cn}.\overline{Cp} \times \overline{Bm''}.\overline{B}$$
$$= \overline{Am''}.\overline{An''}.\overline{Ap''} \times \overline{Bm}.\overline{Bn}.\overline{Bp} \times \overline{Cm'}.$$

234. Wenn man ſtatt des Dreyecks ABC e
eck von einer gröſseren Anzahl Seiten annim
alle durch die 3 verlängerten Seiten des Dreye
geſchnitten werden, ſo iſt der Lehrſatz noch a
bar. Denn vergleicht man nach und nach da
eck abc mit jeder Seite des neuen Vielecks als
verſale, ſo haben wir ſo viele den 3 erſten (232.)
Gleichungen als Seiten zu dem neuen Vieleck.
pliciren wir alle dieſe Gleichungen mit einan
kommt eine der 4ten ähnliche Formel, wo abe

3 mal ſo viel Factoren hat, als in dem neuen
:k Seiten ſind.

Ian kann dieſs ſo ausdrücken:

Zwölfter Lehrſatz.

Venn man in einer Ebene ein Dreyeck
ınd ein Vieleck beſchreibt, beyder Sei-
bis ſie ſich ſchneiden, verlängert, und
'rodukt bildet aus
.llen Segmenten auf $\overline{ab}$ zwiſchen a und
en Seiten des Vielecks,
.llen Segmenten auf $\overline{bc}$ zwiſchen b und
en Seiten des Vielecks,
llen Segmenten auf $\overline{ca}$ zwiſchen c und
:n Seiten des Vielecks,
dieſs Produkt gleich dem Produkt

llen Segmenten auf $\overline{ac}$ zwiſchen a und
n Seiten des Vielecks,
len Segmenten auf $\overline{cb}$ zwiſchen c und
:n Seiten des Vielecks,
llen Segmenten auf $\overline{ba}$ zwiſchen b und
n Seiten des Vielecks.

die Seitenzahl unendlich, d. h. iſt das Vieleck
ırve, ſo haben wir

Dreyzehnter Lehrſatz.

5. Wenn man ein Dreyeck in der Ebe-
ıer geometriſchen Curve beſchreibt,

seine Seiten unbeſtimmt verlängert,
das Produkt bildet aus

1) allen Segmenten auf $\overline{ab}$ zwiſch
und den verſchiedenen Zweigen
Curve,

2) allen Segmenten auf $\overline{bc}$ zwiſch
und den verſchiedenen Zweigen
Curve,

3) allen Segmenten auf $\overline{ca}$ zwiſch
und den verſchiedenen Zweigen
Curve,

ſo iſt dieſs Produkt gleich dem Pro
aus

1) allen Segmenten auf $\overline{ac}$ zwiſch
und den verſchiedenen Zweigen
Curve,

2) allen Segmenten auf $\overline{cb}$ zwiſch
und den verſchiedenen Zweigen
Curve,

3) allen Segmenten auf $\overline{ca}$ zwiſch
und den verſchiedenen Zweigen
Curve.

Es ſey (Fig. 89.) $m\ m'\ m''$ eine ſolche Curve, abc das in ihrer Ebene beſchriebene Dreyeck, d verlängerte Seiten von der Curve geſchnitten we Durch jeden ſolchen Durchſchnittspunkt wollen eine unbeſtimmte Tangente legen. mp ſey die gente durch m, und n, p die Durchſchnittspunkte ſer Tangente mit den Seiten $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{bc}$. Betra man das Dreyeck abc als durch die Transverſale geſchnitten, ſo haben wir

$\overline{am} \cdot \overline{cn} \cdot \overline{bp} = \overline{bm} \cdot \overline{an} \cdot \overline{cp}$

$$\frac{\overline{am}}{\overline{bm}} = \frac{\overline{an}}{\overline{cn}} \cdot \frac{\overline{cp}}{\overline{bp}}$$

ehandeln wir die übrigen Tangenten eben ſo, en wir ſo viele Gleichungen wie die vorige, Berührungspunkte giebt. Multiplicirt man nun ſe Gleichungen zuſammen, ſo hat die daraus ende Formel zum erſten Gliede einen Bruch, Zähler das erſte Produkt des Lehrſatzes und Nenner das zweyte iſt. Man muſs alſo bewei- ſs dieſer Bruch $\doteq$ 1 iſt, oder daſs Zähler und des Bruchs, der das zweyte Glied der Formel gleich ſind. Dazu dient nun unmittelbar der nte Lehrſatz (235).

. Die Curve ſoll z. B. ein Kegelſchnitt ſeyn bis). Jede Seite des Dreyecks ſchneidet ſie nkten, ſo haben wir in allem 12 Segmente n den Punkten *a*, *b*, *c*, und den Armen der Sind nun die 6 Durchſchnittspunkte

$m, m',$

$n, n',$

$p, p',$

wir

$. \overline{am'} \cdot \overline{bp} \cdot \overline{bp'} \cdot \overline{cn} \cdot \overline{cn'} = \overline{an} \cdot \overline{an'} \cdot \overline{cp} \cdot \overline{cp'} \cdot$
$\overline{bm'}$.

Punkte *a*, *b*, *c*, ſind willkührlich innerhalb erhalb der Curve genommen, folglich können sverſalen $\overline{mm'}$, $\overline{nn'}$, $\overline{pp'}$, jede beliebige Rich-

tung haben, wenn ſie nur immer alle 3 die
treffen.

237. Wir wollen annehmen, daſs ſie Ta
werden (Fig. 90.), *abc* ſey das Dreyeck, *A*, *B*,
die Berührungspunkte. Die beyden Punkte *m*,
vorigen Figur fallen in *C* u. ſ. w. wir haben

$$\overline{aC}^2 . \overline{bA}^2 . \overline{cB}^2 = \overline{aB}^2 . \overline{cA}^2 . \overline{bC}^2 \text{ oder}$$
$$\overline{aC} . \overline{bA} . \overline{cB} = \overline{aB} . \overline{cA} . \overline{bC}$$

Eine merkwürdige Eigenſchaft der Kegelſ

238. Wir wollen die 3 Transverſalen $\overline{aA}$,
von den Punkten, wo ſich 2 Tangenten ſchneid
den Berührungspunkten des 3ten ziehen. E
(223.) aus der vorigen Gleichung, daſs dieſe 3
verſalen ſich in einem Punkte D ſchneiden.

239. Erhält man durch Verbindung der
rungspunkte das eingeſchriebene Dreyeck *ABC*
verlängert man die Seiten dieſes neuen Dreyeck
ſie die des erſten treffen, ſo entſteht daraus ein
liche Figur mit der (216.) und ſo kann man a
Curven des zweyten Grades, die zahlreichen
ſchaften anwenden, die, wie wir geſehen
einem ſolchen Syſteme von Transverſalen zuko

240. Entfernt ſich der Punkt *a* ins Unen
(Fig. 91.), ſo werden die Seiten $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ parallel
die Segmente $\overline{am}$, $\overline{am'}$, $\overline{an}$, $\overline{an'}$, unendlich, u
letztes Verhältniſs im Verhältniſs der Gleichhei
wird die Formel (236.)

$$\overline{bp} . \overline{bp'} . \overline{cn} . \overline{cn'} = \overline{cp} . \overline{cp'} . \overline{bm} . \overline{bm'}$$

aus der man dieſe Proportion zieht

$$\overline{bm} . \overline{bm'} : \overline{cn} . \overline{cn'} = \overline{bp} . \overline{bp'} : \overline{cp} . \overline{cp'}$$

Eine bekannte Eigenſchaft der Kegelſchnitte.

)a eben diefer Beweis, durch den dreyzehnten
atz, auf alle Curven angewandt werden kann, fo
ıan fchliefsen, dafs, wenn man in einer geome-
en Curve eine Axe gezogen hat, die fie an meh-
Stellen fchneidet, und mehrere parallele Ordina-
unter beliebigen Winkeln mit der Abfciffenlinie
fich die Produkte der Segmente, welche die
auf der Abfciffenlinie in verfchiedenen Punkten
e abfchneidet, wie die Produkte der correfpon-
en Ordinaten verhalten; eine Eigenfchaft, die
n fchon in der Enumeratio linear. tert. ord. an-
und die eine der fruchtbarften in der Theorie
ırven ift.

a ich aber nicht in diefem Abfchnitte die Eigen-
n der Curven unterfuchen will, fo verweife ich
gen auf den 6ten. Hier wollte ich blofs zeigen,
eit man die Theorie der Transverfalen treiben

e Eigenfchaft (129.) eines Dreyecks, das durch
ransverfale gefchnitten wird, kommt auch an-
ielecken zu, wie grofs auch die Zahl ihrer Sei-
, und wir werden bald finden, dafs fie auch
chen, die nicht in einer Ebene liegen, ftatt fin-
enn man fie auf eine Transverfalebene bezieht,
auf eine grade Linie zu beziehen. Wir kön-
folgenden Satz aufftellen:

Vierzehnter Lehrfatz.

. Wenn ein beliebiges Vieleck in
Ebene befchrieben ift, und man eine
verfale zieht, die alle Seiten (oder

deren Verlängerung) ſchneidet, ſo
Produkt aus der Hälfte der Segment
zwey, und zwey auf den Seiten des
ecks, zwiſchen der Transverſale un
Winkeln, die die Seiten begränzen,
det werden, gleich dem Produkte all
dern Segmente, wenn man die Seg
ſo nimmt, daſs nie 2 in daſſelbe Pr
kommen, die durch denſelben Wink
Vielecks oder denſelben Punkt der T
verſale begränzt werden.

Nimmt man z. B. ein Fünfeck und betra
von den Seiten bis in ihrem Zuſammentreffen
gert, beſonders als ein Viereck und die 5te Se
eine Transverſale, ſo kann man den Satz au
Viereck anwenden, das dann eine Gleichung
2 Gliedern giebt, wo jedes Glied blos 4
ren hat.

Es ſey *ABCDE* (Fig. 92.) das gegebene V
und $\overline{MN}$ die Transverſale in der Ebene des Vi
Aus einem Winkel z. B. aus *B* wollen wir Di
len nach allen andern *E*, *D*, ziehen, die mi
nicht ſchon durch die Seiten des Vielecks verb
ſind. Wir wollen alle dieſe Seiten und Diago
verlängern, bis ſie die Transverſale in *f*, *g*, *p*,
r, *s* treffen. Betrachten wir nun die Dreyecke
BED, *BDC*, die durch die Transverſale geſchn
ſind, ſo haben wir nach (219.)

$$\overline{Af} \cdot \overline{Ek} \cdot \overline{Br} = \overline{Bf} \cdot \overline{Ak} \cdot \overline{Er} \,.$$
$$\overline{Er} \cdot \overline{Bs} \cdot \overline{Dh} = \overline{Br} \cdot \overline{Ds} \cdot \overline{Eh} \,.$$
$$\overline{Ds} \cdot \overline{Bg} \cdot \overline{Cp} = \overline{Bs} \cdot \overline{Cg} \cdot \overline{Dp} \,.$$

Multiplicirt und reducirt man, ſo kommt

$$\overline{Af}.\overline{Bg}.\overline{Cp}.\overline{Dh}.\overline{Ek} = \overline{Ak}.\overline{Bf}.\overline{Cg}.\overline{Dp}.\overline{Eg}.$$

w. z. b. w.

242. Wir können jetzt den Beweis leicht auf den anwenden, wenn das Vieleck nicht in einer e liegt, und von irgend einer Transverſalebene nitten wird.

Denn wenn wir die eben unterſuchte Figur als Projektion der neuen auf eine mit der Trans- ebene ſenkrechte Ebene betrachten, ſo kann dieſe verſalebene durch $\overline{MN}$ vorgeſtellt, und die Linien $\overline{Df}$, u. ſ. w. werden die Projektionen der zu htenden Segmente ſeyn. Nimmt man alſo A', $'$, u. ſ. w. die wahren Punkte, die in A, f, D w. projicirt ſind, alſo die wahren Segmente $\overline{D'f'}$, u. ſ. w. ſo müſſen wir beweiſen, daſs

$$\overline{A'f'}.\overline{B'g'}.\overline{C'p'}.\overline{D'h'}.\overline{E'k'} = \overline{A'k'}.\overline{B'f'}. \overline{C'g'}.\overline{D'p'}.\overline{E'h'}$$

Wendet man nun, ganz wie vorhin, den Satz auf das Dreyeck $B'A'E'$, durch die Transverſale eſchnitten, $B'E'D'$ durch die Transverſale $s'r'$ itten u. ſ. w. an, ſo gelangt man, aus 3 ähnli- Gleichungen, wo die Buchſtaben nur Accente ha- ben ſo dahin.

n die Zahl der Seiten des Vielecks hier offenbar ültig iſt, ſo können wir folgenden Satz ab-

Funfzehnter Lehrſatz.

Wenn irgend ein Vieleck, ma
einer Ebene liegen oder nicht, dur
Transverſalebene geſchnitten wird
das Produkt der Hälfte der Segment
che auf den Seiten des Vielecks zw
der Transverſalebene und den Wink
die Seite begränzen, entſtehen, de
dukte der andern Segmente gleich,
man nur dieſe Produkte ſo beſtimm
nie zwey Segmente, die denſelben
der Transverſalebene, oder denſelbe
kel des Vielecks zu Gränzpunkten
in einem Produkt zuſammenkommen

243. Eben ſo können wir den zwölften
auf alle in einer Ebene beſchriebene Polyg
dehnen.

Sechszehnter Lehrſatz.

Es ſey (Fig. 93.) irgend ein Syſte
graden unbeſtimmten Linien, $\overline{AB}$, $\overline{B}$
u. ſ. w. in derſelben Ebene gezogen
die ein Vieleck bilden. Wir wollen i
ſelben Ebene noch ein anderes Vi
abcde bilden, und die Seiten unbeſt
verlängern; dann durch $(a'b')$ das
dukt des Segments auf *ab*, zwiſchen
Punkte *a* und den verſchiedenen ve
gerten Linien des Syſtems $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, u
bezeichnen; eben ſo durch $(b'a')$ das
dukt der Segmente auf derſelben

ſchen dem Punkte b, und den Linien
$\overline{BC}$, u. ſ. w. Daſſelbe ſoll $(b'c')$ und $(c'b')$
$\overline{bc}$, zwiſchen den Punkten b, c, und
obigen Linien bedeuten u. ſ. w. Dieſs
ausgeſetzt hat man

$(a'b') \cdot (b'c') \cdot (c'd') \cdot$ u. ſ. w. $= (b'a') \cdot (c'b') \cdot$
u. ſ. w.

n der That, wenn man die Diagonale $\overline{ac}$ zieht,
ſo wie vorhin durch $(a'c')$ und $(c'a')$ die Pro-
der Segmente auf $\overline{ac}$ bezeichnet, die durch die
n $\overline{AB}$, BC abgeſchnitten werden u. ſ. w., ſo
an nach dem zwölften Lehrſatze $(a'b')$ $(b'c')$
$= (a'c')$ $(c'b')$ $(b'a')$.

ben ſo wenn man die Diagonale $\overline{ad}$ zieht,
an

$(a'c')$ $(c'd')$ $(d'a') = (a'd')$ $(d'c')$ $(c'a')$

ndlich

$(a'd')$ $(d'e')$ $(e'a') = (a'e')$ $(e'd')$ $(d'a')$

ſultiplicirt man dieſe 3 Gleichungen und redu-
o kommt

$(a'b')$ $(b'c')$ $(c'd')$ $(d'e')$ $(e'a') = (a'e')$ $(e'd')$
$(c'b')$ $(b'a')$

u beweiſen war. Man ſieht, daſs der Beweis
durch die Seitenzahl des Vielecks, noch durch
zahl der Transverſale eingeſchränkt iſt.

4. Eben ſo klar iſt es, daſs derſelbe Beweis
Fall paſst, wo die Punkte a, b, c, d, e nicht
er Ebene ſind, wenn man dann nemlich
$\overline{BC}$, $\overline{CD}$ nicht wie grade Linien, ſondern wie
betrachtet. Man kann alſo im Allgemeinen
en Lehrſatz aufſtellen:

Siebenzehnter Lehrſatz.

Bildet man im Raume irgend ein V
mag es in derſelben Ebene liege
nicht, verlängert die Seiten dieſe
ecks, bis ſie die Seitenflächen eines
ders treffen, und nennt die Schei
Winkel dieſes Vielecks a, b, c, d . .
$(a'b')$ das Produkt aller Segmente
die, wenn man vom Punkte a ausgeh
den Seitenflächen des Polyeders ge
werden u. ſ. w., ſo hat man

$$(a'b')(b'c')(c'd') \ldots\ldots = (b'a')(c'b')(d'$$

245. Aus dieſer ganzen Theorie der Lin
titäten, allein und ohne goniometriſche Fu
betrachtet, flieſst, daſs, ſo oft eine Figur nur
Lineal und dem Zirkel conſtruirt werden kan
eines abgetheilten Kreiſes zu bedürfen, man a
lytiſche Ausdrücke aller, ins Syſtem gehörigen,
aus den Werthen der gegebenen Quantitäten
kann, ohne bey der Rechnung goniometriſch
tionen zu gebrauchen. Man kann nemlich, we
die nöthigen Diagonalen zieht, aus der Fig
Kette von Dreyecken bilden, die in verſchi
Sinn von Transverſalen geſchnitten werden.

246. Dieſelbe Theorie der Transverſalen e
ſich auf ſphäriſche Dreyecke, und andere Vielec
auf der Oberfläche der Kugel durch Bogen g
Kreiſe gebildet werden, wenn man für die Lini
wir behandelt haben, die Sinus der correſpondi
Bogen ſetzt.

Es ſey (Fig. 94.) AFG ein ſphäriſches Dreyeck,
ch den Bogen eines gröſsten Kreiſes, nemlich $\widehat{CBL}$
hnitten. Die 3 Dreyecke ABC, FLB, GLC
en

$$\sin\widehat{AB} : \sin\widehat{AC} = \sin A\hat{C}B : \sin A\hat{B}C$$
$$\sin\widehat{FL} : \sin\widehat{BF} = \sin A\hat{B}C : \sin B\hat{L}G$$
$$\sin\widehat{CG} : \sin\widehat{GL} = \sin B\hat{L}G : \sin A\hat{C}B$$

der Multiplication dieſer 3 Proportionen entſteht

$$\sin\widehat{AB} . \sin\widehat{FL} . \sin\widehat{GC} = \sin\widehat{AC} . \sin\widehat{FB} . \sin\widehat{GL}$$

Formel, die dem fünften Lehrſatz (219.) ent-
ht.

247. Eben ſo wenn ABC das Dreyeck, und $\widehat{LG}$
Transverſale iſt, haben wir

$$\sin\widehat{AG} . \sin\widehat{BF} . \sin\widehat{CL} = \sin\widehat{AF} . \sin\widehat{BL} . \sin\widehat{CG}$$

Multiplicirt man dieſe Gleichung mit der vorigen
reducirt, ſo kommt

$$\sin\widehat{AB} . \sin\widehat{AG} . \sin\widehat{LC} . \sin\widehat{LF} = \sin\widehat{AC} . \sin\widehat{AF} . \sin\widehat{LB} . \sin\widehat{LG}$$

Formel, die dem ſechſten Lehrſatze (222.) ent-
t.

48. Wir wollen die beyden Bogen gröſster Kreiſe
$\widehat{CF}$ ziehen; durch ihren Durchſchnittspunkt D,
en Scheitel A, den Bogen $\widehat{AHDK}$. Jetzt kön-
ir auf die beyden Dreyecke AFK, AGK, die
dieſe letzte Transverſale gebildet wurden, und
die beyden andern $\widehat{GDB}$, $\widehat{FDC}$ ſchneiden,
en gefundenen Grundſatz anwenden, um die
Gleichungen

$$\sin\widehat{AB} . \sin\widehat{DK} . \sin\widehat{FG} = \sin\widehat{AD} . \sin\widehat{BF} . \sin\widehat{KG}$$
$$\sin\widehat{AD} . \sin\widehat{GC} . \sin\widehat{FK} = \sin\widehat{DK} . \sin\widehat{AC} . \sin\widehat{FG}$$

zu erhalten. Multiplicirt man ſie, und red
kommt

$$\sin \widehat{AB} . \sin \widehat{GC} . \sin \widehat{KF} = \sin \widehat{AC} . \sin \widehat{K}$$

eine Formel, die dem ſiebenten Lehrſatz (2
ſpricht.

249. Endlich wenn man den im vorige
gefundenen Grundſatz auf das Dreyeck A
wendet, das zwey Scheitelpunkte mit dem
AFG gemeinſchaftlich, und den 3ten in D
ſich die Transverſalen ſchneiden, ſo hat man

$$\sin \widehat{AC} . \sin \widehat{BG} . \sin \widehat{DK} = \sin \widehat{AK} . \sin \widehat{B}$$

Vergleicht man nun noch daſſelbe Dre
der Transverſale $\widehat{LBC}$, ſo hat man

$$\sin \widehat{AH} . \sin \widehat{BD} . \sin \widehat{CG} = \sin \widehat{AC} . \sin \widehat{BG}$$

Aus der Multiplication beyder Gleichung

$$\sin \widehat{AH} . \sin \widehat{DK} = \sin \widehat{AK} . \sin \widehat{DH}$$

eine Formel, die dem achten Lehrſatz (22
ſpricht.

Man ſieht, wie man die andern Lehrſä
gradlinigten Vielecken auf ſphäriſche anwend
deren Seiten Bogen gröſster Kreiſe auf
gel ſind.

Wir kommen im folgenden Abſchnitt a
Unterſuchungen zurück.

Dreyzehnter Lehrſatz.

250. Wenn man aus irgend einem
te, grade Linien oder Radien nach
Winkeln eines gegebenen Vielecks
ſo wird jeder Winkel dieſes Vielecks
den correſpondirenden Radius in

dere Winkel getheilt ſeyn, daſs man alſo
ppelt ſo viel neue Winkel als alte hat.
nn iſt das Produkt aus dem Sinus der
lfte dieſer neuen Winkel, dem Produkte
: Sinus der andern Hälfte gleich, wenn
n dieſe Produkte ſo bildet, daſs nie
ey Winkel in einem zuſammenkommen,
denſelben Scheitel haben.

Es ſey $ABCDF$ das gegebne Vieleck, (Fig. 95.)
er Fokus, aus dem alle Radien ausgehen, es ſoll
bewieſen werden, daſs

$$\sin A\hat{B}G . \sin B\hat{C}G . \sin C\hat{D}G . \sin D\hat{E}G . \sin E\hat{F}G . \sin F\hat{A}G = \sin C\hat{B}G . \sin D\hat{C}G . \sin E\hat{D}G . \sin F\hat{E}G . \sin A\hat{F}G . \sin B\hat{A}G.$$

Die Dreyecke ABG, BCG, CDG geben

$$\overline{AG} : \overline{BG} = \sin A\hat{B}G : \sin B\hat{A}G$$
$$\overline{BG} : \overline{CG} = \sin B\hat{C}G : \sin C\hat{B}G$$
$$\overline{CG} : \overline{DG} = \sin C\hat{D}G : \sin D\hat{C}G$$ u. ſ. w.

Iultiplicirt man dieſe Proportionen, ſo wer-
ie beyden erſten Glieder identiſch, alſo die zwey-
eich.

ben der Beweis tritt augenſcheinlich ein, wenn
kus auſserhalb der Ebene des Vielecks genom-
t, und wenn dieſs Vieleck ſelbſt nicht in einer
liegt. So iſt z. B. bey einer 3 eckigten Pyra-
unter den 6 Winkeln, die durch die 3 Kanten,
n der Spitze ausgehen, mit den Seiten der
inie gebildet werden, das Produkt der Sinus
n, gleich dem Produkt der Sinus der 3 übrigen,
man ſie wechſelsweiſe nimmt.

251. Die ganze Trigonometrie kann le
einen Grundſatz zurückgebracht werden,
auf den, daſs in jedem Dreyecke die Seiten d
der gegenüberſtehenden Winkel proportion
Unmittelbar werden dadurch ſchon alle Fälle
zwey aufgelöſt, nemlich die, wo man einen
aus den 3 gegebenen Seiten beſtimmen will,
zwey Seiten und dem eingeſchloſſenen Wi
übrige ſucht. Dieſe beyden Fälle laſſen ſic
auf die übrigen bringen.

Es ſey *ABC* (Fig. 9.) das aufzulöſende
aus dem Punkte *A* ſey das Perpendikel $\overline{AD}$
gegenüberſtehende Seite $\overline{BC}$ geſenkt, ſo g
rechtwinklichte Dreyeck *ABD*

$$BD : AB = \sin B\hat{A}D : 1$$

oder

$$\overline{BD} = \overline{AB} \,.\, \sin B\hat{A}D.$$ Da aber *B*
Complement von $A\hat{B}C$ iſt, ſo hat man

$$\overline{BD} = \overline{AB} \,.\, \cos A\hat{B}C$$

eben ſo

$$\overline{CD} = \overline{AC} \,.\, \cos A\hat{C}D$$

alſo

$$\overline{BC} = \overline{AB} \,.\, \cos A\hat{B}C + \overline{AC} \,.\, \cos$$

Aehnliche Gleichungen müſſen für die
andern Seiten des Dreyecks eintreten. Nen
nun die Winkel *A*, *B*, *C*, die gegenüberſte
Seiten *a*, *b*, *c*, ſo hat man folgende 3 Gleichun

$$\left.\begin{aligned} a &= b \,.\, \cos C + c \,.\, \cos B \\ b &= a \,.\, \cos C + c \,.\, \cos A \\ c &= a \,.\, \cos B + b \,.\, \cos A \end{aligned}\right\} \ldots \text{(A)}$$

Multiplicirt man die erste mit a, die zweyte mit die dritte mit c, addirt die beyden letzten, und ıt die erste ab, so kommt

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2b.c.\cos A.$$

Eine Gleichung, die die beyden Fälle auflöst, die der unmittelbaren Anwendung des obigen Grund- es entzogen, die aber so auch, wie man sieht, leicht ıus abgeleitet werden.

ı52. Aus den 3 Gleichungen (A) sehen wir, dass in em Dreyeck jede Seite gleich der Sum- der beyden andern ist, wenn man jede dem Cosinus des Winkels multiplicirt, sie mit der ersten bildet.

Aus diesem Grundsatze allein könnte man wie- m den ziehen, dass die Seiten dem Sinus der ge- berstehenden Winkel proportional sind, und folg- lie ganze Trigonometrie. So eben haben wir die hung

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2b.c.\cos A$$

s gezogen: setzt man in diese für $\cos A$ seinen h, nemlich $\sqrt{1 - \sin A^2}$, so leitet man daraus ab

$$\sin A = \frac{1}{2bc}\sqrt{\{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)\}}$$

[enn]t man die Wurzelgröſse $= K$, so haben wir

$$\sin A = \frac{A}{2bc}$$

$$\sin B = \frac{B}{2ac}$$

$$\sin C = \frac{K}{2ab}$$

woraus $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$

$$\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a}{c}$$

$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c}$ folgt.

253. Eben so leicht leitet man aus demselben satze das Fundamentaltheorem der ganzen der goniometrischen Funktionen her, nemlich

$$\sin(B+C) = \sin B . \cos C + \sin C . \cos B$$

da man nun

$$a = b . \cos C + c . \cos B$$

hat, so substituire man in dieser Gleichung für

$$b = a . \frac{\sin B}{\sin A}$$

$$c = a . \frac{\sin C}{\sin A}$$

so verwandelt sich die Gleichung nach d duktion in

$$\sin A = \sin B . \cos C + \sin C . \cos B$$

Nun ist aber hier bekanntlich

$$\sin A = \sin(B+C)$$

Da diese Formel für jeden Werth von B statt haben muss, so können wir für B z. Complement $\pi - B$ setzen. Dann wird sie

$$\cos(B-C) = \cos B . \cos C + \sin B . \sin C$$

Setzt man C in diesen Formeln negativ,

man den Sinus der Differenz, und den Cosinus Summe.

Der Grundsatz, dass jede Seite gleich der Summe beyden andern ist, wenn man jede von diesen dem Cosinus des Winkels multiplicirt, den sie der ersten bildet, findet nicht allein Anwendung das Dreyeck, sondern er ist auch bey Vielecken, en sie in einer Ebene oder nicht in einer Ebene n, wahr, selbst für alle Polyeder, und man ihn als das Fundamentaltheorem ihrer Theorie chten.

Neunzehnter Lehrsatz.

54. 1) In jedem Vieleck, mag es in r Ebene liegen, oder nicht, ist jede e gleich der Summe aller andern Sei- wenn man jede von diesen mit dem nus des Winkels multiplicirt, den sie der ersten bildet;

) In jedem Polyeder ist jede Seiten- ıe gleich der Summe aller andern, n man jede von diesen mit dem Cosi- des Winkels multiplicirt, den sie mit rsten bildet.

Vir wollen als Ursystem ein Vieleck *ACDFGB* 96.) nehmen, so dass die Perpendikel aus den ln *C*, *D*, *F*, *G*, nemlich $\overline{Cc}$, $\overline{Dd}$, $\overline{Ff}$, $\overline{Gg}$, alle en *A* und *B* fallen. Man ziehe die Parallelen $\overline{F'}$, $\overline{fG'}$, $\overline{gB'}$, so ist

$$\overline{Ac} = \overline{Ac} \,.\, \cos A$$
$$\overline{cd} = \overline{CD} \,.\, \cos C$$
$$\overline{df} = \overline{DF} \,.\, \cos D$$
$$\overline{fg} = \overline{FG} \,.\, \cos F$$
$$\overline{gB} = \overline{GB} \,.\, \cos G$$

wenn A, C, D u. ſ. w. die Winkel bedeu
$\overline{AC}$, $\overline{CD}$ u. ſ. w. mit AB machen. Da nun

$$\overline{AB} = \overline{Ac} + \overline{cd} + \overline{df} + \overline{fg} + \overline{gB}$$

ſo iſt der 1te Theil des Satzes für das Urſy
wieſen.

Dieſs Urſyſtem ſoll ſich nun durch unm
Grade verändern, ſo werden alle neue dar
ſpringende Vielecke, eben ſo viel correlative
ſeyn, und um den Satz für das Urſyſtem unn
auf ſie anwendbar zu machen, braucht man
jeden Winkel jede Seite, den correlativen W
ſetzen.

ACDFGB (Fig. 97.) ſoll das umgeformte
vorſtellen, wo man gleich ſieht, daſs keine Q
durch o oder ∞ gegangen iſt. Die Winkel
Seiten (die einzigen Quantitäten, die hier in
kommen,) konnten bey der Umformung gröſs
kleiner, aber weder o noch ∞ werden. Der
alſo für alle möglichen correlativen Syſteme
mögen die Punkte A, C, D u. ſ. w. in eine
liegen oder nicht. Um den zweyten Theil zu
ſen, wird man ſich erinnern, daſs die Projekti
Fläche, dieſer Fläche mit dem Coſinus der
multiplicirt gleich iſt, woraus alſo unmittel
Satz folgt, wenn alle Perpendikel aus den

die Grundfläche, innerhalb des Umfangs dieser
ndfläche fallen.

Verändert das Urfyftem fich nun durch unmerk-
: Grade, fo bleiben alle neue daraus entftehenden
eder correlative Syfteme, mögen die Perpendikel
rhalb des Umfangs der Grundfläche fallen oder
t. Der Satz ift alfo auch für Polyeder allge-
. *)

So weit war der Druck meines Werkes, als ich erfuhr, dafs
feit langer Zeit eine handfchriftliche Abhandlung von Si-
on L'Huilier aus Genf über denfelben Gegenftand gäbe.
iefe Abhandlung im Sekretariat des Nationalinftituts nieder-
elegt, enthält wirklich das vorige Grundtheorem, mit ver-
hiedenen wichtigen Folgen, die der Verfaffer daraus mit ge-
ohntem Scharffinn abgeleitet hat. Es liegt in der Natur
athematifcher Wahrheiten, dafs fie oft ungefähr zu derfelben
eit, durch verfchiedene Mittel und von verfchiedenen Perfo-
n entdeckt werden können. Uebrigens kann das Zufammen-
effen mit dem Bürger L'Huilier, der fchon durch andere
hriften einen verdienten Namen erhalten hat, für mich nicht
ders als fchmeichelhaft feyn.

Die angeführte Abhandlung kann als eine Fortfetzung fei-
r Polygonometrie angefehen werden.

Mit der gradlinichten Tetragonometrie haben fich mehrere
elehrten fchon befchäftigt. Lambert liefs es fich angelegen
n, ihre Wichtigkeit zu zeigen, und entwarf einen Plan da-
, den Biornfen, ein gefchickter dänifcher Geometer, aus-
irte, und mit dem fich auch Meyer in Göttingen mit Erfolg
fchäftigte. Lexell erfchöpfte denfelben Gegenftand in 2 Ab-
ndlungen im 19. und 20. Bande der Acta Scient. Petropol.

Mein Zweck hier ift ganz von dem verfchieden, den fich
fe berühmten Geometer vorfteckten. Ich will nicht, wie
, die Auflöfung der Vielecke für jeden befondern Fall ge-
, de fchon die Aufzählung diefer Fälle zeigt, dafs ein fol-
s Detail beynahe unmöglich wird, fobald das Vieleck über
Viereck herausgeht, und fchon für das vollftändige Vier-
mit feinen 3 unbeftimmt verlängerten Diagonalen. Ich
llte nur diefs Detail für gradlinichte und fphärifche Vielecke,
l für Polyeder durch eine allgemeine Tafel (wie die Ta-

255. Man kann offenbar den Punkt, Scheitel eines jeden Winkels des Vielecks bi eine unendlich kleine Seite betrachten. M auch dieser unendlich kleinen Seite jede Richtung beylegen; und da, nach den Begri (87.) entwickelt wurden, die Winkel, wel Richtung mit allen andern Seiten des Vielecl dieselben sind, welche jede andere der ersten Linie, mit eben den Seiten bilden würde, man folgenden Satz daraus schliessen.

Zwanzigster Lehrsatz.

Die Summe der Seiten irgend Vielecks, mag es in einer Ebene oder nicht, von denen jede mit den nus des Winkels multiplicirt ist, de Richtung im Sinne des Umfangs geno mit einer beliebigen im Raume, in nem Sinne, gezogenen graden Linie ist = o.

256. Da man eben so den Scheitel der k chen Winkel eines Polyeders als eine unendlicl Seitenfläche betrachten kann, so kann man a genden Satz aufstellen:

fel 146 für Dreyecke) ersetzen. Uebrigens habe ich zeigt, wie sie zu bilden sey, da meine andern Beschä mir jetzt nicht die Ausführung erlauben.

A. d. V

Ein und zwanzigster Lehrsatz.

Die Summe der Seitenflächen eines Po-
lers, von denen jede mit dem Cosinus
Winkels multiplicirt ist, den sie mit ir-
l einer im Raum gegebenen Ebene bil-
ist = o.

257. Wir wollen die Seiten eines Vielecks a, b,
u. s. w. nennen, die Winkel durch diese Seiten
nne des Umfangs gebildet

$\widehat{ab}$,

$\widehat{ac}$,

$\widehat{bc}$ u. s. w.

hat also

$$a = b \cdot \cos \widehat{ab} + c \cdot \cos \widehat{ac} + d \cdot \cos \widehat{ad} \text{ u. s. w.}$$

$$b = a \cdot \cos \widehat{ab} + c \cdot \cos \widehat{bc} + d \cdot \cos \widehat{bd} \ldots$$

$$c = a \cdot \cos \widehat{ac} + b \cdot \cos \widehat{bc} + d \cdot \cos \widehat{cd} \ldots$$

u. s. w.

licirt man die erste Gleichung mit a, die zweyte
, die dritte mit c u. s. w., und addirt, so
t:

$$aa + bb + cc = 2ab \cdot \cos \widehat{ab} + 2ac \cdot \cos \widehat{ac} + \ldots$$

Vir können also folgenden Satz aufstellen:

Zwey und zwanzigster Lehrsatz.

1 jedem Vieleck, mag es in einer Ebe-
egen oder nicht, ist die Summe der
rate der Seiten, gleich der doppelten
ne der Produkte dieser Seiten, zwey
zwey mit dem Cosinus des einge-
ssenen Winkels multiplicirt.

258. Hätte man, ſtatt alle Gleichungen
ren, die erſte von der Summe der übrigen a
ſo hätten wir

$$aa = bb + cc + dd \ldots - 2(bc . cos\, \hat{bc}$$
$$\hat{bd} \text{ u. ſ. w.})$$

d. h.

In jedem Vielecke iſt das Quadra
Seite gleich der Summe der Q
der übrigen, weniger der do
Summe, der Produkte dieſer
Seiten, zu zweyen mit dem
des eingeſchloſſenen Winkels
plicirt.

Die bekannte Formel für Dreyecke

$$aa = bb + cc - 2 . bc . cos\, A$$

iſt ein beſonderer Fall dieſes Satzes.

259. Wenn man, ſtatt alle dieſe Gleichu
addiren, willkührlich auf der einen Seite eine
Anzahl addirt, und eben ſo alle andern b
dann die letzte Summe von der erſten abz
ſchlieſst man daraus, daſs im Allgemeinen

In jedem Vielecke, mag es in einer
liegen oder nicht, die Summe de
drate einer beliebigen Anzahl S
weniger der doppelten Summe d
dukts eben dieſer Seiten, zu z
mit dem Coſinus des eingeſchlo
Winkels multiplicirt, gleich i
Summe der Quadrate aller ander
ten, weniger der doppelten Summ
Produkte dieſer andern Seiten

zweyen mit dem Cosinus des einge-
schlossenen Winkels multiplicirt.

260. Verändert das Vieleck seine Gestalt, so dass Seiten doch dieselben bleiben, und nur die Winsich ändern, so bleibt die Summe der Quadrate Seiten immer dieselbe, also auch der Werth, den für dieselbe Summe gefunden haben. (257.) Also haupt

enn ein Vieleck, mag es in einer Ebene iegen oder nicht, sich auf irgend eine Art umformt, wobey es aber immer geschlossen bleiben muss, und jede Seite hre Grösse behält, so ist die Summe der Produkte dieser Seiten, zu zweyen, nit dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels multiplicirt, eine Constante.

iese Theorie der Vielecke kann auch auf Polyeangewandt werden, wie jetzt geschehen soll.

Drey und zwanzigster Lehrsatz.

261. In jedem Polyeder ist die Summe Quadrate der Seitenflächen, gleich der elten Summe der Produkte dieser Seiächen zwey und zwey mit dem Co- des Winkels, den sie einschliessen, iplicirt.

Venn a, b, c die Seitenflächen des Polyeders o hat man nach (254.) die Gleichungen

$$a = b \,.\, \cos \widehat{ab} + c \,.\, \cos \widehat{ac} + \ldots.$$

$$b = a \,.\, \cos \widehat{ab} + c \,.\, \cos \widehat{bc} + \ldots.$$

u. s. w.

multiplicirt man die erſte mit a, die zwe
u. ſ. w. ſo kommt

$$aa + bb + cc = 2ab\, cos\, \hat{ab} + 2ac \,.\, cos$$

Zieht man die erſte von der Summe all
ab, ſo iſt

262. **Das Quadrat irgend einer
fläche des Polyeders gleich der Sum
Quadrate aller übrigen, weniger d
pelten Summe der Produkte aller
andern Flächen zwey und zwey n
Coſinus des eingeſchloſſenen Wink
tiplicirt.**

263. **In jeder dreyeckigten Py
die 3 auf einander ſenkrechte Sei
chen hat, iſt das Quadrat der viert
tenfläche gleich der Summe der Qu
der 3 erſten.**

Stellt man ſich im Raume 3 andere Ebe
den 3 Seitenflächen, die vom Scheitel der P
ausgehn, parallel ſind, vor, ſo werden dieſ
Ebenen auch auf einander ſenkrecht ſeyn,
3 Projektionen der Grundfläche auf dieſen
Ebenen werden reſpektive den 3 parallelen S
chen der Pyramide gleich ſeyn. Alſo wird d
drat dieſer Grundfläche auch der Summe der Q
der Projektionen gleich ſeyn.

Gleiche Flächen in derſelben Ebene beſ
müſſen auch auf jede andere gegebene Ebene
Projektionen haben; ſubſtituirt man alſo für die
fläche der beſagten Pyramide, ein beliebiges
von gleichem Fſächeninhalt, ſo werden die Pr

dieses Vielecks, respektive den entsprechenden
ektionen des Dreyecks gleich seyn, das die Grund-
ıe der Pyramide bildet, man kann also daraus den
nnten Grundsatz ableiten:

264. Das Quadrat der Fläche eines Viel-
s, das in einer Ebene beschrieben ist, ist
ch der Summe der Quadrate seiner Pro-
ionen auf 3 unter einander senkrech-
Ebenen.

In der dreyeckigten vorher betrachteten Pyramide
de der 3 Seitenflächen, die man unter einander
echt annahm, die Projektion der Grundfläche auf
bene, in der die Seitenfläche liegt, und umge-
ist die Grundfläche die Summe der 3 Dreyecke,
ie Projektion der Seitenfläche auf ihr bilden.
kann also im Allgemeinen schliessen, da diesel-
chlüsse auf jedes beliebige Vieleck passen:

65. Die Fläche eines Vielecks ist gleich
Summe der 3 Projektionen der Projek-
en, die entstehen, wenn man zuerst das
ck auf 3 unter einander senkrechte
en projicirt, und dann von neuem jede
r Projektionen, auf die Ebene des ge-
en Vielecks.

66. Es sey also S die Fläche eines Vielecks,
r die 3 Winkel, die das Vieleck mit 3 auf ein-
senkrechten Ebenen macht, also die Projek-

$$S \cdot \cos p.$$
$$S \cdot \cos q$$
$$S \cdot \cos r$$

Und die 3 Projektionen der Projektione

$$S \,.\, cos\, p^2$$
$$S \,.\, cos\, q^2$$
$$S \,.\, cos\, r^2$$

alſo nach dem vorigen Lehrſatz

$$S = S \,.\, cos\, p^2 + S \,.\, cos\, q^2 + S\, co$$

oder

$$cos\, p^2 + cos\, q^2 + cos\, r^2 = 1 \,..$$

eine bekannte Sache. Addirt man die chungen

$$sin\, p^2 + cos\, p^2 = 1$$
$$sin\, q^2 + cos\, p^2 = 1$$
$$sin\, r^2 + cos\, r^2 = 1$$

und zieht von ihrer Summe die Gleichung ſo kommt

$$sin\, p^2 + sin\, q^2 - sin\, r^2 = 2$$

267. Dieſe Gleichungen können augen auf die 3 Winkel angewandt werden, die Grundfläche einer 3eckigten Pyramide, v 3 Seitenflächen gebildet werden, wenn di einander ſenkrecht ſind. Statt des Quadrats che eines Vielecks kann man das Produkt chen zweyer anderer Vielecke nehmen, wov dem vorigen gleich iſt. Stellt man ſich nun eines von dieſen neuen Vielecken doppelt, u. ſ. w. ſo groſs wird, während das andere bleibt, ſo wird das Produkt dieſer beyden auch doppelt, dreyfach u. ſ. w. In eben hältniſſe wächſt jede Projektion des verän Vielecks. Es iſt alſo im Allgemeinen

Das Produkt der Flächen zweyer Vielecke, die in derselben Ebene beschrieben sind, der Summe der 3 Produkte gleich, die so entstehen, indem man die Projektionen der beyden Polygone auf jeder der senkrechten Ebenen multiplicirt.

68. Wenn man, statt alle Gleichungen (261) zu ren, nur eine gewisse Anzahl einerseits, und die an besonders addirt, dann die letzte Summe von ersten abzieht, so findet man im Allgemei dass

jedem Polyeder die Summe der Quadrate einer beliebigen Anzahl von Seienflächen, weniger der doppelten Sume eben dieser Seitenflächen, zwey und wey mit dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels multiplicirt, gleich ist der umme der Quadrate aller andern Seinflächen, weniger der doppelten umme, der Produkte eben dieser Seinflächen, zwey und zwey mit dem osinus des eingeschlossenen Winkels ultiplicirt.

9. Zieht man aus einem Punkte im Raum sorade Linien, als ein Vieleck Seiten hat, so dass eser Linien einer entsprechenden Seite des Vieleich und parallel, auch zu demselben Sinus gest, und zu diesen Linien, noch durch denselben eine andere unbestimmte Linie oder Transverh beliebiger Richtung, so folgt aus dem, was

(255) geſagt iſt, daſs in dieſem Syſtem von die Summe aller darin vorkommenden, die T ſale ausgenommen, mit dem Coſinus des Winl ſie mit der Transverſale bilden, = o iſt. *F* (ſey der Punkt, $\overline{FA}$, $\overline{FB}$, $\overline{FC}$, die Linien, die ten des Vielecks gleich und parallel ſind, auch ſelben Richtung gezogen. Wir wollen ein ne eck *ABCDGH* bilden, indem wir die En dieſer Radien verbinden, endlich durch *F* ei bige grade Linie $\overline{LFK}$ ziehen, und uns ein *MFN*, die darauf ſenkrecht ſey, vorſtellen.

Nach dem, was geſagt iſt, iſt alſo die Su Radien des Vielecks *ABCDGH*, wenn jeder Coſinus des Winkels, den er mit *LK* bildet plicirt wird, = o.

Nun iſt jeder von dieſen Radien, mit den luten Werth des Coſinus, des Winkels, de *LK* bildet, multiplicirt, offenbar gleich dem dikel, das von ſeinem andern Endpunkte Ebene *MN* fällt. Aber man ſieht leicht, daſ der correlative Werth dieſes Coſinus für die *A*, *B*, *C* poſitiv iſt, er für die Punkte *H*, *C*, an der andern Seite der Ebene *MN* liegen, ſeyn muſs. Alſo ſind die Perpendikel, die d dern Seite entſprechen, invers, alſo iſt die Tot der Perpendikel, die von den Winkelpunl Vielecks auf die Ebene *MN* geſenkt ſind, = c man die, die an der einen Seite der Ebene fa ſitiv, und diejenigen, die an die andere Sei negativ nimmt.

Wir wollen uns jetzt irgend eine andere Ebene
vorſtellen, parallel mit *MN* und auſserhalb des
ecks gezogen, dann wird die gerade Linie *FK*
Summe der Perpendikel gleich ſeyn, die aus allen
keln des Vielecks *ABCDGH* auf dieſe neue Ebe-
gezogen werden, wenn man ſie durch ihre An-
, oder durch die Zahl der Winkel dividirt. Of-
ar iſt jede von ihnen gleich *FK* mehr oder we-
r dem Perpendikel, das aus demſelben Winkel
die Ebene *MN* gezogen wird, nachdem dieſer
kt unterhalb oder oberhalb der letzten Ebene, in
ıg auf *hKc* iſt: alſo iſt die Summe aller Perpen-
l auf *hKc* gleich ſoviel mal *FK* als es Winkel
t, wenn man dazu eine Summe addirt, die, wie
bewieſen haben, gleich o iſt. Alſo iſt *FK* wirklich
ch der Summe der Perpendikel auf *hKc*, durch
Zahl dividirt, *FK* iſt alſo die mittlere Entfernung
dieſer Winkel von der Ebene *hKc*: und da wir
willkührlich angenommen haben, ſo folgt, daſs
Entfernung des Punktes *K* von irgend einer Ebe-
gleich der mittlern Entfernung aller Punkte
Vielecks von derſelben Ebene iſt. Wir wollen
dieſen Punkt Punkt der mittleren Entfer-
gen nennen, jede grade Linie, die durch ihn
z. B. *LFK* Axe oder Linie der mittlern
fernungen, jede Ebene, wie *MN*, die durch
den Punkt geht, Ebene der mittleren Ent-
ungen. Wir können alſo folgenden Satz auf-
ı.

Vier und zwanzigſter Lehrſatz.

270. In jedem Vielecke, mag es in
Ebene liegen oder nicht, giebt es
Punkt der mittlern Entfernungen, w
die Eigenſchaft hat, daſs ſeine Entfe
von einer beliebigen Ebene wirklic
Mittel aller Entfernungen der Wink
ſes Vielecks von derſelben Ebene iſt,
der Summe dieſer letzten, dividirt
ihre Anzahl, wenn man die negativ n
die ſich an der Seite dieſer Ebene
den, wo ihre Summe am kleinſten i

Geht alſo dieſe Ebene ſelbſt durch den Pu
mittleren Entfernungen, ſo iſt die Summe der
nungen dieſer Ebene von den Winkeln, die
derſelben Seite befinden, gleich der Summe d
fernungen dieſer Ebene, von den Winkeln
andern Seite.

271. Da die Lage eines Punktes im Raum
ſeine Entfernungen von 3 Ebenen ſchon b
wird, ſo ſieht man leicht, daſs in jedem Viel
ein Punkt der mittleren Entfernungen ſeyn kan

272. Wir wollen im Raum irgend ein
von Punkten annehmen. Man kann ſich imm
ſtellen, daſs ſie durch eine Folge von graden
vereinigt ſind, die den Umfang eines Vielecks
alſo kann man den vorigen Satz auf jedes b
Syſtem von Punkten im Raume anwenden.

Fünf und zwanzigſter Lehrſatz.

273. Wenn man ſich vorſtellt, es ſey ırch den Punkt der mittleren Entfernun- :n der Winkel eines Vielecks, mag dieſs eleck in einer Ebene liegen oder nicht, ne beliebige grade Transverſale gezo- n, eben ſo vom Mittelpunkt, nach jedem inkel des Vielecks ein Radius, ſo iſt die mme der Produkte eines jeden dieſer dien, mit dem Coſinus des Winkels, den mit der Richtung der Transverſale bil- :, = 0.

Der Satz folgt unmittelbar aus 254 und 269.

Sechs und zwanzigſter Lehrſatz.

274. In jedem Vielecke, mag es in einer ne liegen oder nicht, iſt die Summe der drate der Entfernungen aller Winkel einem beliebig im Raum angenomme- Punkte, gleich der Summe der Qua- e der Entfernungen eben dieſer Win- vom Punkte der mittleren Entfernun- wenn man das Quadrat der Entfer- ; des erſten im Raum beliebig ange- menen Punkts vom Punkte der mitt- n Entfernungen dazu addirt, multi- rt mit der Zahl der Winkel des Viel-

s ſey *ABCD* (Fig. 99.) irgend ein Vieleck, *F* ınkt der mittleren Entfernungen, *K* ein anderer

im Raume angenommener Punkt, aus jedem
$A, B, C, D,$ ziehe man zwey grade Linien, e
F, die andere nach K, dann haben wir

$$\overline{AK}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FK}^2 - 2\overline{AF}.\overline{FK} \cos A\hat{F}\ldots$$

$$\overline{BK}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{FK}^2 - 2BF.FK \cos B\hat{F}\ldots$$

u. ſ. w.

addirt man dieſe Gleichungen, und nennt
der Winkel des Vielecks n, ſo haben wir

$$\overline{AK}^2 + \overline{BK}^2 + \overline{CK}^2 \ldots = \overline{AF}^2 + \overline{BF}^2 + C\ldots$$

$$n.\overline{FK}^2 - 2\overline{FK}(\overline{AF}.\cos A\hat{F}K + \overline{BF}.\cos \ldots$$

aber der Coefficient von $2\overline{FK}$ iſt $= 0$ (273) a

$$\overline{AK}^2 + \overline{BK}^2 + \overline{CK}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{BF}^2 + \ldots$$

$$n.\overline{FK}^2$$

w. z. b. w.

275. Daraus folgt, daſs die Summe der
der Entfernungen, aller Winkel eines Polygo
Punkt ihrer mittleren Entfernungen ein Klei
d. h. kleiner als die Summe der Quadrate de
nungen eben dieſer Winkel, von jedem and
kührlich im Raume angenommenen Punkte
$\overline{AK}^2 + \overline{BK}^2 + \overline{CK}^2 \ldots$ muſs am kleinſten ſeyn,
$= 0$, weil $\overline{FK}^2$, eben weil es ein Quadrat iſ
negativ werden kann.

276. Man kann eben ſo wie in (272) d
gen Lehrſatz auf jedes Syſtem von Punkten
den, eben ſo folgenden Satz daraus ſchlieſsen.

277. Wenn man im Raum ein beli
Syſtem von Punkten hat, und ſic
ſphäriſche Oberfläche vorſtellt von
bigem Durchmeſſer, deren Mittel
der Punkt der mittleren Entfernung

lle Punkte des Syſtems iſt, ſo wird die
umme der Quadrate der Entfernungen
ben dieſer Punkte, von einem andern be-
ebig auf der Oberfläche der Kugel ange-
ommenen Punkte gleich der Summe der
uadrate der Entfernungen eben dieſer
unkte des vorgenommenen Syſtems vom
ittelpunkt der Kugel (d. h. vom Punkte
er mittleren Entfernungen) ſeyn, wenn
an dazu das Quadrat des Radius dieſer
ıgel multiplicirt, mit der Zahl der im
ıum angenommenen Punkte addirt.

Alſo iſt dieſe Summe dieſelbe für alle Punkte der
geloberfläche. Befinden ſich die im Raume ange-
nmenen Punkte in derſelben Ebene, ſo kann man
t der Kugel einen Kreis nehmen, und der Satz
ibt wahr.

Bilden dieſe Punkte die Scheitelpunkte eines or-
tlichen Vielecks, ſo hat man folgenden Satz.

278. Die Summe der Quadrate der Ent-
nungen aller Winkel eines regelmäſsi-
ı Vielecks, von einem beliebigen Punkte
es Kreiſes, der mit dem Vieleck einer-
Mittelpunkt hat, iſt gleich der Summe
Quadrats des Halbmeſſers des Vielecks,
l des Quadrats des Halbmeſſers des
eiſes, wenn man dieſe Summe mit der
ıl der Winkel des Vielecks multipli-
t.

Dieſe Folge des vorigen Satzes iſt merkwürdig,

weil man fie als eine Ausdehnung des pythago
Lehrfatzes betrachten kann.

In der That AKB (Fig. 100.) fey ein Kr
fen Mittelpunkt ich im Punkte O annehme, w
len zwey um 180° entfernte Punkte, A, B,
beftimmen. Zieht man nun zu einem 3ten w
lich angenommenen Punkte K die Linien A
fo ift $\overline{AK}^2 + \overline{BK}^2 =$ 4mal dem Quadrate de
meffers und folglich conftant, wo auch K in
liegen mag.

Theilt man den Kreis in 3 gleiche Theile
Punkten A, B, C, (Fig. 101.) und nimmt noc
willkührlichen Punkt K im Umfange an, fo i
dem vorigen Satze

$$\overline{AK}^2 + \overline{BK}^2 + \overline{CK}^2 = 6 . R^2$$

alfo auch conftant.

Theilt man den Kreis in 4, 5, 6 oder üb
in n gleiche Theile (Fig. 102, 103.) und nimm
kührlich auf dem Umfange einen neuen Punk
wird die Summe der Quadrate der geraden
aus K nach den Winkelpunkten gezogen, imm
ftant feyn, nemlich $= 2n . R^2$.

Befchreibt man einen andern dem vorige
centrifchen Kreis, von gröfserem oder kle
Halbmeffer, fo folgt aus demfelben Satze, dafs,
man auf diefem neuen Umkreis einen Punkt K
und aus allen Winkeln des Vielecks dahin gr
nien zieht, die Summe der Quadrate diefer
noch conftant feyn wird, wohin man auch den
K, den Umfang des neuen Kreifes, fetzt. Daff

Fall mit eingeſchriebenen Vielecken, die nur ſym-
riſch ſind.

Endlich kann man daſſelbe von regulairen, oder
netriſchen Polyedern behaupten, die auf eine Ku-
berfläche bezogen werden, deren Mittelpunkt mit
Mittelpunkt des Polyeders zuſammenfällt, und
iſt offenbar nur eine neue Ausdehnung des pytha-
iſchen Satzes.

Eben ſo wenn man in einem Kreiſe ein Vieleck
ıreibt und auſserhalb im Raume einen Punkt an-
ıt, ſo iſt die Summe der Quadrate der Entfer-
en dieſes Punktes, von allen Winkeln des Viel-
conſtant, wie auch das Vieleck im Kreiſe lie-
nag, wenn es nur immer eingeſchrieben bleibt.

Eben das iſt für regulaire umſchriebene Vielecke
, oder im Allgemeinen für alle Vielecke, die einen
lpunkt der Figur haben, der im Mittelpunkt des
s liegt.

ben das iſt der Fall für regulaire Polyeder, oder
, die einen Mittelpunkt der Figur haben, mö-
e nun in oder um der Kugel beſchrieben ſeyn.
hon oft erwähnte Summe bleibt dieſelbe, wo
las Polyeder in oder um der Kugel liegen mag,
es nur immer eingeſchrieben, oder umgeſchrie-
leibt.

9. Stellt man ſich vor, daſs man aus einem in
bene eines Kugelſchnittes gegebenem Punkte,
en an die Endpunkte zweyer beliebigen ver-
enen Durchmeſſer ziehe, ſo wird die Sum-
Quadrate dieſer 4 Linien immer conſtant ſeyn,
h auch die Durchmeſſer verändern (in demſel-

ben Kegelſchnitt) und zwar gleich der Su
dem doppelten Quadrate der groſsen Axe,
pelten Quadrate der kleinen Axe, und der
Entfernung des betrachteten Punktes vom M
der Curve: denn der Mittelpunkt der Curv
der Punkt der mittleren Entfernungen der
te, die die verbundenen Durchme
gränzen.

Eben ſo kann man beweiſen, daſs die S
Quadrate, der Entfernungen des gegebener
von den 4 Winkeln eines um den Kegelſ
ſchriebenen Parallelogramms immer dieſelbe
auch dieſs Parallelogramm ſich ändert.

230. Bezieht man alle andere Punkte de
auf einen unter ihnen, ſo ſieht man, daſs di
der Quadrate der Entfernungen dieſes Punk
len andern, gleich der Summe der Quadrate
fernungen aller dieſer andern Punkte vom P
mittlern Entfernungen des allgemeinen Sy
wenn man dazu das Quadrat der Entfernun
ſten dieſer Punkte vom Punkte der mittlere
nungen multiplicirt, mit der Zahl der Punkt
gemeinen Syſtems addirt.

Verfährt man ſo für alle Punkte des
und addirt die Gleichungen, ſo kann man ſcl

Sieben und zwanzigſter Lehrſatz

Hat man im Raume eine belieb
zahl Punkte, und verbindet man
zwey und zwey durch grade Lin
wird die Summe der Quadrate aller

ien gleich seyn der Summe der Quate der Entfernungen aller Punkte des rachteten Systems, vom Punkte der tleren Entfernungen, wenn man diese ıme mit der Zahl dieser Punkte multiirt.

281. In einem Dreyecke ist, wie man leicht sieht, der Punkt der mittleren Entfernungen dere Punkt, wo sich die 3 aus den Winkeln auf die nüberstehenden halben Seiten gezogenen Linien eiden. Also ist die Summe der Quadrate der Entıngen dieses Punktes von den 3 Winkeln, gleich n Drittel von der Summe der Quadrate der ten eben dieses Dreyecks.

Bey einem gleichseitigen Dreyeck also, wenn man erste Entfernung b nennt, und die Seite a, hat

$$bb = \frac{aa}{3} \text{ oder } b = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

bekannte Eigenschaft.

282. In einer 3 eckigten Pyramide ist der Punkt nittleren Entfernungen der 4 Scheitel, derjenige, ich die 4 Transversalen kreuzen, die man aus je- Scheitel auf den Punkt der mittleren Entfernunler Scheitelpunkte der gegenüberstehenden Grund- zieht. Dieser Punkt muss also vom Scheitel der Transversale entfernt seyn, die von eben n Scheitel ausgeht. Es ist also nach dem voriatze die Summe der Quadrate der Entfernungen dieser Scheitelpunkte vom Punkte ihrer mittleren

Entfernungen, gleich einem Viertel der S
Quadrate der 6 Kanten der Pyramide.

283. Hat irgend ein Syſtem von Punkt
Mittelpunkt der Figur, ſo muſs der auch
der mittleren Entfernung aller dieſer Punkte

284. Man weiſs, daſs in jedem Parall
die Summe der Quadrate der beyd
gonalen gleich der Summe der Q
der 4 Seiten iſt. Eben dieſer Satz läſst
genſcheinlich aus dem vorigen Satze herleit

285. Legendre hat in ſeinen Elémens
métrie gezeigt, daſs in jedem Paralle
dum die Summe der Quadrate der 4
nalen, gleich der Summe der Quadr
12 Kanten iſt. Eben das leitet man aus
gen Satz durch ſehr leichte Reduktionen ab.

286. Man kann dieſe Sätze auf alle Poly
Polyeder erſtrecken, die einen Mittelpunkt
haben. Es ſey z. B. *ABCDEF* (Fig. 1
Sechseck, in dem *K* der Mittelpunkt der
d. h. ein ſolcher Punkt, daſs die 3 Di
$\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ alle in demſelben Punkte *K*
gleiche Theile getheilt werden; dann iſt die
der Quadrate dieſer 3 Diagonalen gleich zwey
Summe der Quadrate der 6 Seiten, und der
der Diagonalen, die nicht durch *K* gehen.

Nennt man die Summe der Quadrate de
ten, und der 6 Diagonalen, die nicht durch de
K gehen, $= C$,

Die Summe der Quadrate der 3 Diagonalen, die
ı K gehen, $= D$,
ılſo die Summe der Quadrate der 6 halben Dia-
en $= \frac{D}{2}$ ſo haben wir

$$C + D = 6 . \frac{D}{2}$$

$$C = 2D \text{ w. z. b. w.}$$

ehandelt man jedes andere Polygon oder Polye-
las einen Mittelpunkt der Figur, und eine grade
l Scheitelpunkte hat ($= 2n$) eben ſo, ſo kann
llgemein beweiſen, daſs

$$C = (n - 1) . D$$

iſt z. B. in jedem Octaeder, das einen ittelpunkt der Figur hat, d. h. deſſen Diagonalen ſich in einem Punkte hneiden, der ſie auch in zwey gleiche älften theilt, die Summe der Quadrate eſer 3 Diagonalen gleich der halben ımme der Quadrate der 12 Kanten s Octaeders.

Es iſt auch ein bekannter Satz, daſs in jedem ınklichtem Parallelogramm die Summe der Qua-
er Entfernungen, eines Punktes ſeiner Ebene,
diagonal entgegengeſetzten Winkeln, gleich
ıme der Quadrate der Entfernungen deſſelben
von den beyden andern Winkeln iſt. Es iſt
, ob man den Punkt innerhalb oder auſser-
s Parallelogramms annimmt. Man kann das
ht aus Betrachtung des Punktes der mittleren

Entfernungen beweifen, und es dadurch
jeden im Raume angenommenen Punkt ausd

Eben fo findet man, dafs, wenn n
einem im Raume angenommenen
zu den Endpunkten einer Diagona
rechtwinklichten Parallelepipedu
nien zieht, die Summe der Quadr
fer beyden Linien für jede Diagon
felbe feyn wird.

288. Wir fahen oben (280), wie man,
Entfernungen unter einander in einem Sy
Punkten gegeben find, die Summe der Qu
rer Entfernungen vom allgemeinen Punkt der
Entfernungen finden kann. Wir wollen jetzt
chen, wie man für jeden einzelnen Punkt f
fernung findet.

Wir wollen uns irgend ein Syftem von
im Raume vorftellen (Fig. 105.). K fey der a
Punkt der mittleren Entfernungen, A e
Punkte, $N =$ ihrer Anzahl,

$P =$ der Summe der Quadrate de
nungen des Punktes A von je
andern,

$Q =$ der Summe der Quadrate de
nungen aller Punkte des Syftems
verglichen.

Man foll alfo $\overline{AK}'$ in Werthen von N
finden.

Wenn man die Summe der Quadrate
fernungen aller Punkte des Syftems vom Pu

leren Entfernungen R nennt, ſo hat man (274) (280)

$$R = P - N . \overline{AK}^2$$

$$R = \frac{Q}{N}$$

$$\overline{AK}^2 = \frac{N . P - Q}{NN}$$

Acht und zwanzigſter Lehrſatz.

289. In einem Syſtem gegebener Punkte as Quadrat der Entfernung eines unter n, vom allgemeinen Punkte der mitt- n Entfernungen, gleich der Summe der drate der Entfernungen dieſes Punk- von allen andern, multiplicirt mit der der Punkte des Syſtems, wenn man dieſem Produkt die Summe der Qua- e der Entfernungen aller Punkte zwey zwey verglichen abzieht, und dieſe renz durch das Quadrat der Zahl der te dividirt.

Vill ich z. B. im Dreyeck ABC beſonders die nung $\overline{AD}$ des Punktes A vom Punkte der en Entfernungen D haben, ſo habe ich

$$\overline{AD}^2 = \frac{3(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2) - (\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2)}{9}$$

$$= \tfrac{1}{9}(2\,\overline{AB}^2 + 2 . \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2)$$

Eben so ist in einer 3eckigten
mide das Quadrat der Entfernungen
ihrer Scheitelpunkte vom Punkte d
lern Entfernungen, gleich 3mal der
der Quadrate der 3 Kanten, die von
Scheitel ausgehen, weniger der Sum
Quadrate der 3 Kanten der Grun
alles durch 16 dividirt.

Man kann diese Theorie ausdehnen, w
das allgemeine System in partiale Systeme
und die Verhältnisse untersucht, die zwisc
respektiven Entfernungen der besondern Mitt
der partialen Systeme bestehen.

Bezieht man das System auf 3 rechtw
Ebenen, so würde man den Punkt der mittle
fernungen sehr vortheilhaft als Anfangspunkt
ordinaten wählen. Denn stellt man sich 3 se
Ebenen vor, die durch den Punkt K gehe
nennt x, y, z die Entfernungen des Punkte
diesen 3 Ebenen, so hat man

$$\overline{AK}^2 = xx + yy + zz$$

also hat man auch (288)

$$xx + yy + zz = \frac{NP - Q}{NN}$$

die man als eine Lineargleichung betrachten
weder x, noch y, noch z u. s. w. sondern
yy, zz u. s. w. darin vorkommen.

Neun und zwanzigster Lehrsatz.

290. In jedem Viereck, mag es in
Ebene liegen oder nicht, ist die Summ

adrate der beyden Diagonalen gleich
r doppelten Summe der Quadrate der
ɾden graden Linien, die die Mittelpunk-
der gegenüberſtehenden Seiten ver-
den.

Es ſey $ABDC$ (Fig. 107.) das Viereck, m, n, p,
die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$,
ſoll beweiſen, daſs

$$\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = 2(\overline{mn}^2 + \overline{pq}^2)$$

Wenn wir die 4 Linien $\overline{mp}$, $\overline{pn}$, $\overline{nq}$, $\overline{qm}$ ziehen,
erden dieſe 4 Linien ein Parallelogramm bilden,
mehr die Seiten, $\overline{mp}$, $\overline{nq}$, werden der Diagonale
parallel und $= \frac{1}{2}\,\overline{BC}$ ſeyn. Eben ſo $\overline{mq}$, $\overline{np}$ par-
und gleich $\frac{1}{2}\,\overline{AD}$.

Man hat alſo

$$\overline{BC}^2 = 4\,\overline{mp}^2 = 2\,\overline{mp}^2 + 2\,\overline{nq}^2$$

eben ſo

$$\overline{AD}^2 = 2\,\overline{mq}^2 + 2\,\overline{pn}^2$$

$$\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 = 2(\overline{mp}^2 + \overline{nq}^2 + \overline{mq}^2 + \overline{pn}^2)$$

wegen der Parallelogramme

$$\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 = 2(\overline{mn}^2 + \overline{pq}^2)$$

a in dieſer Gleichung nur Quantitäten in der
en Potenz vorkommen, ſo iſt ſie auf alle corre-
Syſteme anwendbar, d. h. auf alle Formen der
ke, alſo auch wenn man das als entgegenge-
Seiten nimmt, was wir für Diagonalen ange-
en haben. Man kann alſo auch den Satz ſo
chen:

edem Viereck, mag es in einer Ebene
egen oder nicht, iſt die Summe der

Quadrate zweyer gegenüberste
Seiten gleich der doppelten Sun
Quadrats der Linie, die die
punkte der beyden andern Seit
bindet, und des Quadrats der Li
die Mittelpunkte der beyden D
len verbindet.

Nennt man also z. B. zwey beliebige g
stehende Seiten eines Vierecks, m'' die Linie
Mittelpunkte verbindet

n, n', n'' die beyden andern Seiten,
Linie, die ihre Mittelpu
bindet,

p, p', p'', die beyden Diagonalen,
Linie, die ihre Mittelpu
bindet,

so hat man

$$m^2 + m'^2 = 2(n''^2 + p''^2) \ldots (A)$$

$$n^2 + n'^2 = 2(m''^2 + p''^2) \ldots (B)$$

$$p^2 + p'^2 = 2(m''^2 + n''^2) \ldots (C)$$

Addirt man alle diese 3 Gleichungen, so

$$m^2 + m'^2 + n^2 + n'^2 + p^2 + p'^2 = 4(m''^2 +$$

d. h.

In jedem Vierecke, mag es in ein
ne liegen oder nicht, ist die Sun
Quadrate der 4 Seiten, und 2 D
len, gleich der 4fachen Summ
Quadrate der Linien, die die
punkte der gegenüberstehender
verbinden, und der Linie,

Mittelpunkte ihrer Diagonalen verbindet.

Addirt man (A) und (B) und zieht man (C) davon so hat man

$$m^2 + m'^2 + n^2 + n'^2 = p^2 + p'^2 + 4p''^2$$

h.

n jedem Viereck ist die Summe der Quadrate der 4 Seiten, gleich der Summe der Quadrate der beyden Diagonalen, und des 4fachen Quadrates der Linie, die die Mittelpunkte der beyden Diagonalen verbindet.

Euler gab diesen eleganten Satz in den Petersbur- Commentarien, wobey ich nur noch bemerke, dass ch auf alle Vierecke, mögen sie in einer Ebene n oder nicht, und auf alle ihre Formen erstreckt, man schon daraus sieht, dass in der Gleichung nur lrate vorkommen.

291. Dieser Satz kann nicht allein auf Vierecke aller Art angewandt werden, sondern man kann auch auf Körper erstrecken, deren Seitenflächen bige Vielecke sind, z. B. auf eine viereckigte Pyle, die parallel oder schief mit der Grundfläche nitten ist, oder überhaupt auf jedes Hexaeder.

Dreyssigster Lehrsatz.

n jedem Hexaeder, sey es regelmässig nicht, ist die Summe der Quadrate 12 Kanten, und die Summe der Qua- e der 12 Diagonalen der Seitenflächen, h der dreyfachen Summe der Qua- e der 4 Diagonalen, die den Körper

durchschneiden, und der vierfachen der Quadrate der 6 Linien, die zw zwey, die Mittelpunkte der 4 letzt gonalen verbinden.

Da die Summe der Quadrate der Diagona Seitenfläche (291) gleich der doppelten Su Quadrate der beyden Linien ist, die die gege henden Seiten 2 und 2 verbinden, so kann vorigen Satz auch so ausdrücken:

In jedem Hexaeder ist die 3fache der Quadrate der 4 Diagonalen, di den Körper gehen, und die 4fache der Quadrate der 6 Linien, die zw zwey die 4 Mittelpunkte dieser Dia verbinden, gleich der Summe der te, der 12 Seitenflächen, und der ten Summe der Quadrate der 12 die zu zweyen die Mittelpunkte de Seitenfläche gegenüberstehenden verbinden.

Man sieht leicht, daſs dieser Satz nur dehnung des von Legendre gegebenen (285)

292. Bemerkt man, daſs bey allen diese nur auf das Quadrat erhobene Quantitäten men, so sieht man leicht, daſs sie auf alle n Systeme anwendbar sind, d. h. daſs alles, von den Kanten und Diagonalen eines b Hexaeders gesagt haben, allgemein von de nungen 8 beliebig im Raume angenommene gelten muſs. Seiten können Diagonalen, Di Seiten werden u. s. w. Solcher Versetzungen

glich, der einzige dreyſsigſte Lehrſatz alſo auf ir-
ıd ein Hexaeder angewandt, giebt 2520 Gleichun-
, die alle verſchieden ſind.

In der That kann man auf Polyeder anwenden,
ı wir von Vierecken geſagt haben. Wir bemerk-
, daſs, wenn die 4 Scheitelpunkte gegeben ſind,
ı aus den Linien, die ſie zu zweyen verbinden,
ierecke bilden kann, wenn wir dieſen Ausdruck
ıllgemeinſten Sinn nehmen. Eben ſo können wir,
n wir Polyeder im allgemeinſten Sinn nehmen,
n Punkten

$$\frac{(n-1)\,(n-2)\ldots 1}{2}$$

ɔder zuſammenſetzen (alſo für $n = 8$, erhält man
: · 5 · 4 · 3 = 2520 Polyeder).

:93. Die 8 gegebenen Scheitelpunkte ſeyen A,
C, D, E, F, G, H. Als Maaſsſtab zur Ver-
ıung wollen wir z. B. das Hexaeder annehmen
108.), wo $ABCD$ eine Seitenfläche, $EFGH$, die
überſtehende Grundfläche, und $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{GC}$, $\overline{DH}$,
Kanten ſind, die die beyden entgegengeſetzten
lflächen trennen. Die 4 Diagonalen, die durch
lörper gehen, ſind alſo $\overline{AG}$, $\overline{BH}$, $\overline{CE}$, $\overline{DF}$.
ırücken wir alſo, der Kürze wegen, durch
$\frac{1}{2}GH$ die grade Linie aus, die die Mittelpunkte
$\overline{IG}$, $\overline{GH}$ verbindet u. ſ. w. ſo kann man den
gſten Lehrſatz ſo in Gleichung ſetzen:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{BF}^2 + \overline{C}$$
$$+ \overline{DH}^2 + \overline{EF}^2 + \overline{EH}^2 + \overline{FG}^2 + \overline{GH}$$
$$+ \overline{BD}^2 + \overline{AH}^2 + \overline{DE}^2 + \overline{AF}^2 + \overline{BE}$$
$$+ \overline{CF}^2 + \overline{CH}^2 + \overline{DG}^2 + \overline{EG}^2 + \overline{FH}^2 =$$
$$+ 3\,\overline{BH}^2 + 3\,\overline{CE}^2 + 3\,\overline{DF}^2 + 4\,(\tfrac{1}{2}AG$$
$$+ 4\,\overline{(\tfrac{1}{2}AG, \tfrac{1}{2}CE)}^2 + 4\,\overline{(\tfrac{1}{2}AG, \tfrac{1}{2}DF}$$
$$\overline{(\tfrac{1}{2}BH, \tfrac{1}{2}CE)}^2 + 4\,\overline{(\tfrac{1}{2}BH, \tfrac{1}{2}DF)}^2 + 4\,(\tfrac{1}{2}CE$$

Alle correlativen Gleichungen deſſelben
erhält man aus dieſer Urgleichung, wenn
nach Erfordernifs, die Buchſtaben *A, B, C,*
G, H, verwechſelt, ohne etwas an den Z
ändern.

Ein und dreyſsigſter Lehrſatz.

294. In jedem Vieleck, mag es i
Ebene liegen oder nicht, und in
Polyeder, iſt die Summe der Quadr
graden Linien, die zu zweyen die
punkte der Seiten und Diagonalen
den, der vierte Theil der Summe d
drate dieſer Seiten und Diagonalen,
plicirt mit der Zahl der Scheitel
des Polyeders, oder Vielecks, we
zuvor 2 davon abgezogen hat,

d. h. wenn

n = Zahl der Scheitelpunkte des
oder Polyeders,

D = Summe der Quadrate ſowohl
als der Diagonalen,

d = Summe der Quadrate der Li

zu zweyen die Mittelpunkte der Seiten
und Diagonalen verbinden,

hat man immer

$$d = \frac{1}{4}(n-2) D$$

Im Dreyecke z. B. hat man $n = 3$, alſo $d = \frac{1}{4} D$

Hat man $n = 4$, ſo wird die Gleichung $d = \frac{1}{2} D$,
h. ein Viereck, iſt die Summe der Quadrate der
Linien, die zu zweyen die Mittelpunkte der Sei-
und Diagonalen verbinden, gleich der halben
nme der Quadrate dieſer Seiten und Diagonalen.

Die Wahrheit des Satzes folgt leicht aus dem vo-
en (ſiehe auch 296.).

295. Man kann dieſe Theorie noch allgemeiner
chen, und eine Menge intereſſanter Folgen aus ihr
ıen.

Wir wollen ein beliebiges Syſtem von Punkten
B, *C*, *D*, *E* u. ſ. w. annehmen, deren Anzahl
n

a'', b'', c'' ſollen die Punkte der mittleren Entfernung aller Punkte *A*, *B*, *C* zu zweyen genommen, ſeyn: alſo die Mittelpunkte der Linien $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, u. ſ. w.

a''', b''', c''' ſollen die Punkte der mittleren Entfernung aller Punkte zu dreyen betrachtet ſeyn, d. h. die Punkte der mittleren Entfernung der Syſteme (*A*, *B*, *C*), (*A*, *B*, *D*), (*B*, *C*, *D*) u. ſ. w.

a'''', b'''', c'''' follen die Punkte der
Entfernung u. f. w. — fe

.

Endlich fey K der allgemeine Punkt de
ren Entfernungen der Punkte $A, B, C, D,$ u

x, x'', x''' follen Entfernungen wie

$\overline{AK}, \overline{BK}, \overline{CK}$. u. f. w.

$\overline{a''K}, \overline{b''K}, \overline{c''K}$. u. f. w.

$\overline{a'''K}, \overline{b'''K}, \overline{c'''K}$. u. f. w b

X, X'', X''', Entfernungen wie

$\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$

$\overline{a''b''}, \overline{a''c''}, \overline{b''c''}$

$\overline{a'''b'''}, \overline{a'''c'''}, \overline{b'''c'''}$ u. f. w

Σ bedeute die Summe.

Man fieht gleich anfangs, dafs, der all
Punkt K der mittleren Entfernungen, derfe
die Punkte a'', b'', c'' u. f. w. a''', b''', c
w. ift.

Eben fo leicht überfieht man, dafs, wenn
der Punkte A, B, C u. f. w. $= n$ ift, die Z
Linien $\overline{AB}, \overline{AC}$ u. f. w. und folglich die Z
Punkte a'', b'', c'' u. f. w. $= \frac{n.(n-1)}{2}$ fey
fo wie die Zahl der Syfteme von 3 Punkten $(A$
(A, B, D) u. f. w., und folglich ihrer Mitte
a''', b''', c'''

$$= \frac{n.(n-1).(n-2)}{2.3}$$

u. f. w.

Wir haben also folgende Formeln (280.):

$$\left.\begin{array}{l} X^2 = n\,\Sigma x^2 \\ X''^2 = \frac{n.(n-1)}{2}\,\Sigma x''^2 \\ X'''^2 = \frac{n.(n-1)\,(n-2)}{2\cdot 3}\,\Sigma x'''^2 \\ X''''^2 = \frac{n.(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4}\,\Sigma x''''^2 \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\}(A)$$

296. Wir haben

$$(\overline{AK}^2 + \overline{BK}^2) = (\overline{Aa''}^2 + \overline{Ba''}^2) + 2\,\overline{a''K}^2$$

r

$$= \tfrac{1}{2}\overline{AB}^2 + 2\,\overline{a''K}^2$$

Wir wollen eine ähnliche Gleichung, für alle ıkte des Systems, zu zweyen verglichen annehmen, alle diese Gleichungen, deren Zahl $= \frac{n.(n-1)}{2}$ ı wird, addiren, so sieht man leicht, daſs, wenn der Quantitäten wie $\overline{AK}$, $\overline{BK}$ u. s. w. durch x, Quantität wie AB durch X und jede Quantität $a''K$ durch x'' vorgestellt wird, die aus obiger ıme entspringende Gleichung

$$(n-1)\,\Sigma x^2 = \tfrac{1}{2}\Sigma X^2 + 2\,\Sigma x''^2$$

wird.

Eben so haben wir

$$(\overline{AK}^2 + \overline{BK}^2 + \overline{CK}^2) = (\overline{Aa'''}^2 + \overline{Ba'''}^2 - \overline{Ca'''}^2) + 3\,\overline{a'''K}^2$$

$$= \tfrac{1}{3}(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2) + 3\,\overline{a'''K}^2$$

Aehnliche Gleichungen ſollen für alle Pu
Syſtems, zu 3en verglichen, ſtatt finden, u
Gleichungen (deren Zahl $= \frac{n.(n-1)\,(n-2)}{2\,.\,3}$
wir addiren, ſo erhalten wir offenbar die Fo

$$\frac{(n-1)\,(n-2)}{2}.\Sigma x^2 = \frac{n-2}{3}\,\Sigma X^2 +$$

Betrachtet man die 4 Punkte A, B, C
hat man

$$(\overline{AK}^2 + \overline{BK}^2 + \overline{CK}^2 + \overline{DK}^2) = \tfrac{1}{4}(\overline{AB}^2 + \overline{A}$$
$$+ \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2) + 4\,\overline{a''''K}^2$$

woraus man wie vorhin

$$\frac{(n-1).(n-2).(n-3)}{2\,.\,3}\,\Sigma x^2 = \frac{(n-2)\,(n-}{2\,.\,4}$$
$$+ 4\,\Sigma x''''^2$$

zieht.

Wir haben alſo folgende Reihe von Form

$$(n-1)\,\Sigma x^2 = \tfrac{1}{2}\Sigma X^2 + 2\,\Sigma x''^2$$

$$\frac{(n-1)\,(n-2)}{2}\,\Sigma x^2 = \frac{n-2}{3}\,\Sigma X^2 + 3\,\Sigma x'''^2$$

$$\frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2\,.\,3}\,\Sigma x^2 = \frac{(n-2)\,(n-}{2\,.\,4}$$
$$\Sigma X^2 + 4\,\Sigma x''''^2$$

$$\frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{2\,.\,3\,.\,4}\,\Sigma x^2 =$$
$$\frac{(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{2\,.\,3\,.\,5}\,\Sigma X^2 + 5\,\Sigma x'''''^2$$

u. ſ. w. u. ſ. w.

Das Geſetz dieſer Formeln iſt leicht zu üb
bis etwa auf den Coefficienten von ΣX^2. Um
beſtimmen, bildet man eine Reihe Brüche

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{6}{4},\ \frac{10}{5},\ \frac{15}{6},\ \frac{21}{7}\ \text{u. ſ. w.}$$

ren Zähler die Triangularzahlen, und deren Nenner
natürlichen Zahlen ſind. Eben ſo bildet man die
ihe

$$1,\ \frac{n-2}{3},\ \frac{(n-2)\ (n-3)}{3\cdot 4},\ \frac{(n-2)\ (n-3)\ (n-4)}{3\cdot 4\cdot 5}$$

u. ſ. w.

l multiplicirt das erſte Glied der obern Reihe mit
n erſten der untern, das zweyte Glied mit dem
eyten u. ſ. w. woraus die Reihe der Coefficienten
ΣX^2 entſteht.

Wir haben $\Sigma X^2 = n\,\Sigma x^2$, ſubſtituirt man in den
gen Formeln dieſen Werth, ſo kommt

$$\left.\begin{aligned} x''^2 &= \left\{(n-1) - \frac{n}{2}\right\}\Sigma x^2 \\ x'''^2 &= \left\{\frac{(n-1)\ (n-2)}{2} - \frac{n.(n-1)}{3}\right\}\Sigma x^2 \\ x''''^2 &= \left\{\frac{(n-1)\ (n-2)\ (n-3)}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{n.(n-1)\ (n-3)}{2\cdot 4}\right\} \\ x^2 & \\ &\text{u. ſ. w.}\end{aligned}\right\}\ (C)$$

Durch dieſe Formeln und diejenigen, die wir
) gefunden haben, hat man offenbar das unmit-
re Verhältniſs aller Quantitäten Σx^2, ΣX^2, $\Sigma x''^2$,
$'^2$ u. ſ. w. zu zweyen betrachtet, durch eine
hung des erſten Grades, die nur 2 Glieder hat.
erſte Formel in (C) iſt nichts, als der algebraiſche
ruck des ein und dreyſsigſten Lehrſatzes (294).

297. Man erkennt leicht in dem, was wir über
Punkt der mittleren Entfernungen geſagt haben,

die Eigenschaften des Schwerpunktes in der
nik, und in der That sind sie identisch. M
daraus, dafs dieser Punkt der Geometrie a
und dafs seine mechanischen Eigenschaften
denjenigen hergeleitet werden könnten, die
metrie lehrt. Uebrigens kennt man scho
(z. B. durch Guldius Satz) den Vortheil, den
metrie, aus der Betrachtung des Schwerpunkt
kann, Vortheile, die man aber nicht auf dem
chen Wege erhielt. Es scheint also diese We
der Lehre vom Punkte der mittleren Entfe
in den Anfangsgründen der Geometrie eine
Lücke zu seyn. Die Quellen der Elementa
trie, die doch die gewöhnlichste ist, würden
weit ergiebiger werden, und man könnte vi
die Anwendung sehr nützliche Sätze, zu den
diese Geometrie nur mit Mühe gelangt, einf
leicht beweisen.

298. Vielleicht sollte die Geometrie nicht
da stehen bleiben, sondern auch die Bewegung
fassen, die nicht von der wechselseitigen Wirku
Gegenwirkung der Körper entstehen: denn M
ist eigentlich nicht die Wissenschaft der Bewe
sondern die Wissenschaft der Mittheilung
wegung. Der Begriff der Bewegung ist eben
fach wie der Begriff der Dimensionen, und v
sind beyde unzertrennlich. Schon die ersten
der Geometrie lehren die Linie als den We
sich bewegenden Punktes betrachten, und
Begriff stimmt mit der materiellen Operation
wenn man eine Linie mit der Feder zieht.

ird hier gelehrt die Fläche als aus der Bewe-
ıng einer Linie, den Körper als aus Bewegung
ıer Fläche entſtanden, zu betrachten. Warum ſoll-
ı wir nicht weiter gehen, und betrachten, was aus
r Bewegung eines Körpers im Raume entſteht?
cht dieſe Bewegung, an und für ſich betrachtet,
cht den Gegenſtand der Mechanik aus, ſondern ſie
rachtet die Wirkung der Modifikationen, die ſie
ch den Stoſs anderer Körper, die in ihrer Bahn
en, erleidet.

Zwey Körper können in Bezug auf einander,
3 verſchiedene Arten gedacht werden; ſie können
z von einander getrennt, und ohne irgend einen
ımmenhang ſeyn; oder ſie können auf einander
ch Stoſs, Druck oder Zug wirken; oder endlich
können ſich in bloſser Berührung oder Nebenein-
rſtellung befinden, ohne auf einander zu wirken.
Der erſte Zuſtand gehört ausſchlieſslich der Geo-
ie an, der zweyte der Mechanik, der dritte iſt
hſam ein Mittelzuſtand, den man wie den Ueber-
aus der einen Wiſſenſchaft in die andere be-
ten kann, oder wenn man will, wie eine
ehnung der erſten, die der zweyten als Einlei-
dient.

Vir wollen uns ein Syſtem von Körpern vorſtel-
die mehrere Berührungspunkte haben, aber ſo,
kein Körper auf den andern wirkt. Hier wirft
lie Frage auf: welchen Bedingungen muſs dieſs
ı bey ſeiner Bewegung unterworfen ſeyn, damit
örper, aus denen es beſteht, in Berührung blei-
ohne doch den geringſten wechſelſeitigen Ein-

flufs zu erlangen, ohne fich in ihren refpek
wegungen zu hindern und ohne fich zu tren
verfteht fich, dafs diefe Nebeneinanderftellu
ohne Druck und Aufhören der Stetigkeit ft
Eine folche Aufgabe ift ganz unabhängig von
fetzen der Mittheilung der Bewegung, inde
nach der Annahme keine Bewegung mitget
geftört ift, man kann vielmehr diefe Bewegu
metrifche Bewegungen nennen, deren Be
nicht der Mechanik, fondern der Geometri
und deren Darftellung eigentlich nie in de
Wiffenfchaft fehlen follte. Die Eigenfchaft
Bewegung, wie ich fchon fonft bemerkt h
ganz in dem Grundfatz begriffen, dafs, wenn
che Bewegung bey einem Syftem von Kör
findet, die entgegengefetzte Bewegung in j
genblicke möglich ift, welches bey einer n
metrifchen Bewegung nicht ftatt findet. Z
berührende Kugeln, z. B. die fich geometrif
gen, d. h. ohne aufzuhören in Berührung
find fo befchaffen, dafs fie in jedem Augen
Gefchwindigkeiten annehmen können, die de
lebenden Diametral entgegengefetzt find. D
nicht ftatt finden, wenn ihre Bewegungen k
metrifche wären, d. h. wenn diefe Gefchw
ten ihre Entfernung bewirkten, weil dann,
entgegengefetzte Bewegung zu nehmen, beyd
fich durchdringen müfsten.

Wäre die Theorie diefer geometrifchen B
gen ergründet, fo würden die Mechanik und
lik unendlich vereinfacht werden. Man w

nz auf die Entwickelung des allgemeinen Grund-
tzes der Mittheilung der Bewegungen zurückbrin-
n. Die analytifchen Schwierigkeiten, auf die man
der Wiffenfchaft des Gleichgewichts und der Be-
egung ftöfst, rühren vorzüglich daher, dafs die
eorie der geometrifchen Bewegungen noch nicht
lendet ift, eine Theorie, die alfo alle Aufmerk-
ıkeit der Geometer verdient.

Zwey und dreyfsigfter Lehrfatz.

299. Wenn man aus einem im Raum an-
nommenen Punkte grade Linien zieht;
von jede einer andern Seite eines be-
bigen Vielecks gleich und parallel ift,
l zwar fo, dafs diefe Linien auch im
n des Umfangs gezogen find, und wenn
n aus irgend einem andern im Raume
enommenen Punkte ein Perpendikel auf
e diefer Linien, oder Radien, fenkt, fo
d die Summe der Produkte eines jeden
pendikels mit dem Segmente des Radius
, wenn man die Segmente, die nicht auf
Radien felbft, zu denen fie gehören,
dern auf ihre Verlängerungen fallen,
nverfem Sinn nimmt.

Es fey (Fig. 106.) F der Punkt im Raume; $\overline{FA}$,
$\overline{FC}$, die Radien, die von diefem Punkte ausge-
die refpektive den Seiten eines gegebenen Viel-
parallel und gleich, auch in demfelben Sinn ge-
ı find. Aus dem Punkte K find die Perpendikel
$\overline{Kb}$, $\overline{Kc}$, auf diefe verfchiedenen Radien gefenkt,

eben so aus den Punkten A, B, C, die Pe
$\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ auf $\overline{FK}$. Die ähnlichen
$\overline{AFA'}$, $\overline{KFa}$ geben

$$\overline{FA} : \overline{FK} = \overline{FA'} : \overline{Fa}$$

also

$$\overline{FA} \cdot \overline{Fa} = \overline{FK} \cdot \overline{FA'}$$

aus demselben Grunde hat man

$$\overline{FB} \cdot \overline{Fb} = \overline{FK} \cdot \overline{FB'}$$

$$\overline{FC} \cdot \overline{Fc} = \overline{FK} \cdot \overline{FC'}$$

u. s. w.

Addirt man diese Gleichungen, so komm

$$\overline{FA}.\overline{Fa} + \overline{FB}.\overline{Fb} + \text{u. s. w.} = \overline{FK}(F$$

$+$ u. s. w.)

Da nun aber

$$\overline{FA'} = \overline{FA} \cdot \cos \hat{AFK}$$

$$\overline{FB'} = \overline{FB} \cdot \cos \hat{BFK}$$

u. s. w.

so hat man (255)

$$\overline{FA'} + \overline{FB'} + \overline{FC'} - \ldots = 0$$

Es ist also auch

$$\overline{FA} \cdot \overline{Fa} + \overline{FB} \cdot \overline{Fb} + \overline{FC} \cdot \overline{Fc} +$$

Wenn man diejenigen Segmente Fb u.
gativ nimmt, die wie $\overline{Fb}$, $\overline{Fc}$, stumpfen Wi
sprechen, oder die nicht auf den Radien se
dern auf ihren Verlängerungen im entgege
Sinne befindlich sind w. n. e. w.

Man sieht leicht die Analogie dieses Sa
der Theorie der virtuellen Geschwindigkeite
Mechanik, indem man verschiedene Kräfte,
Punkt in verschiedenem Sinn ziehen, imm
die Seiten eines Vielecks vorstellen kann,

$\overline{A}$, $\overline{FB}$, $\overline{FC}$, $\overline{FD}$ u. ſ. w. die Kräfte vorſtellen kön-
n, die ſich im Gleichgewicht um den Punkt *F* hal-
. Stellt man ſich nun vor, daſs *F* ſich bewege,
l daſs ſeine Schnelligkeit, ſowohl in Hinſicht der
ſse als der Richtung, durch $\overline{FK}$ dargeſtellt werde,
werden die Linien $\overline{Fa}$, $\overline{Fb}$, $\overline{Fc}$ u. ſ. w. dieſe Ge-
windigkeit in der Richtung der verſchiedenen
fte $\overline{FA}$, $\overline{FB}$ u. ſ. w. vorſtellen.

Die vorher gefundene Gleichung lehrt uns alſo,
die Summe der Produkte einer jeden der Kräfte,
im Gleichgewicht um den Punkt *F* ſind, mit der
hwindigkeit dieſes Punktes, in der Richtung die-
raft gemeſſen, multiplicirt, $= 0$ iſt. Das iſt denn
in der That der allgemeine Grundſatz des Gleich-
chts.

Ich nehme an, daſs alle Kräfte um einen Punkt
mmelt ſeyen. Gäbe es mehrere ſolche Punkte,
z. B. in einer Maſchine, die aus Seilen zuſammen-
zt iſt, ſo könnte man auf jeden daſſelbe Raiſonne-
anwenden. Da die Spannungen der Stricke, die
Punkte zu zweyen verbinden, für jeden Knoten
ben ſind, ſo wie die Geſchwindigkeit der Enden,
Richtung des Stricks genommen, ſo kommen dieſe
nungen nicht in die Rechnung, und der Grund-
ſt allgemein für jede aus Stricken zuſammenge-
Maſchine wahr, d. h. für jede Maſchine, weil
auf eine aus Stricken zuſammengeſetzte zurück-
ht werden kann. Ich gab von dieſem Grund-
nen vollſtändigen Beweis in meinem

Eſſai ſur les machines en général, 1783.
Umgearbeitet unter dem Titel: Principes fonda-

mentaux de l'équilibre et du mouvement, P
8. erſchienen.)

Sind die Linien $\overline{FA}$, $\overline{FB}$ u. ſ. w. in ein
oder ſtellen ſie die Projectionen eines Syſt
Kräften, das um den Punkt F im Gleichge
auf derſelben Ebene vor, ſo findet man, w
die andern Seiten des vorhin betrachteten
vergleicht,

$$\overline{FA}.\overline{Ka} + \overline{FB}.\overline{Kb} + \overline{FC}.\overline{Kc} + \ldots =$$

wobey man diejenigen von den Kräften $\overline{F}$
die ſich im entgegengeſetzten Sinne um den Pu
drehen ſuchen, als invers betrachtet. Dies iſt
kanntlich der Grundſatz in der Theorie der

Wenn ein Körper von einem beſtimmt
ausgeht, und ſich eine Zeit t hindurch, in ei
benen Richtung gleichförmig mit der Geſchw
v bewegt, dann dieſelbe Zeit t hindurch mi
ſchwindigkeit v in einer andern Richtung,
von dem Punkt, wo er angekommen war,
u. ſ. w. ſo kommt er, nach allen dieſen parti
wegungen, auf denſelben Punkt, auf den e
men wäre, wenn er ſich während derſelbe
mit einer aus allen partiellen Geſchwindigk
ſammengeſetzten Geſchwindigkeit bewegt hät
dieſe zuſammengeſetzte iſt die letzte Seite des
das die andern Geſchwindigkeiten bildete
ſieht daraus, wie wichtig die Theorie der
für die Mechanik iſt.

Drey und dreyſsigſter Lehrſatz.

300. Wenn man durch einen Punkt im
aume mehrere Vielecke zieht, von denen
:des der Seitenfläche eines Polyeders
leich, und parallel iſt, auch nach derſel-
en Seite gewandt, ſo iſt die Summe der
rodukte dieſer Vielecke mit den Perpen-
keln, die man aus irgend einem Punkte
ı Raume auf ſie fällt, = o, wenn man die
:rpendikel negativ nimmt, die auf die
rkehrte Seite dieſer Vielecke fallen.

Um den Beweis zu führen, wollen wir anneh-
n, daſs man aus irgend einem Punkte m im In-
n des Vielecks, eine Linie nach jedem der körper-
ıen Winkel ziehe, ſo wird das Polyeder in ſo viele
amiden zerlegt ſeyn, als es Seitenflächen hat. Alle
ſe Pyramiden haben ihren Scheitel in m, und der
perliche Inhalt des Polyeders wird gleich ſeyn
:m Drittheil der Summe dieſer Seitenflächen, wenn
: mit dem auf ſie aus m gezogenen Perpendikel
tiplicirt wird. Eben ſo verfährt man aus einem
en Punkte m', und erhält wieder eine Summe = o.
ıt man beyde von einander ab, ſo iſt die dreyfache
erenz auch = o.

Stellt man ſich nun vor, daſs dieſs Urſyſtem durch
ıd eine Bewegung der Punkte m und m' ſich än-
, ſo bleiben die Perpendikel in Hinſicht auf das
ſtem direkt, ſo lange m, m', nicht aus dem in-
des Vielecks herauskommen; ſo wie dieſs aber
ieht, ſind die Perpendikel, die auf die äuſsern
n der Seitenflächen fallen, durch o gegangen und

invers geworden, die 3fache Differenz ist a
$=$ o, wenn die Punkte m, m' außerhalb de
ders liegen, wenn man nur die Perpendikel
äußern Seiten negativ nimmt.

Mit leichter Mühe sieht man, daß die I
immer $=$ o bleibt, wenn man die Seitenfläc
selbst parallel bewegt; sie wird also auch $=$
wenn man sich alle Seitenflächen durch eine
gezogen denkt, es versteht sich, daß jede Seit
auch hier nach ihrer anfänglichen Lage para
muß.

Stellen wir uns nun vor, daß der Punk
den Punkt fällt, durch den alle Vielecke gezog
so werden alle aus m' gezogene Perpendikel $=$
auch die Summe der Produkte, die sich a
Punkt m' beziehen, also auch die Summe der Pr
die sich auf m beziehen, weil diese immer der
gleich ist.

301. Da die Projection jedes geschlossen
ecks auf eine beliebige Ebene wieder ein ge
nes Vieleck ist, so ist alles, was wir von ein
chen Vielecke bewiesen haben, auch auf seine
tionen anwendbar. So kann man, wenn das
auf 3 rechtwinklichte Ebenen bezogen wird,
dem der Vielecke, welche die 3 Projectionen
trachteten Vielecks bilden, alles das beweise
man vom Vielecke selbst bewies.

Erklärungen.

302. *ABCDEF* (Fig. 109.) sey i
ein Vieleck, ich werde einen jeden W

vie $B\hat{A}F$ z. B. dem Theile $BCDEF$ des
'ielecks gegenüberſtehend nennen, eben
o ſteht der Winkel $A\hat{B}C$ dem Theile $CDEFA$
es Vielecks gegen über.

Zieht man die Diagonalen $\overline{BF}$, $\overline{AC}$, ſo
ehaupte ich auch, daſs die Winkel $B\hat{A}F$,
$\hat{B}C$, reſpective den Diagonalen $\overline{BF}$, $\overline{AC}$
egenüberſtehen.

Eben ſo heiſst der Winkel $C\hat{A}F$ dem
heile $CDEF$ des Vielecks und der Diago-
ıle $\overline{CF}$ gegenüberſtehend, der Winkel $C\hat{A}E$
m Theile $C\hat{D}E$ des Vielecks und der
agonale $\overline{CE}$ gegenüberſtehend u. ſ. w.

Zieht man aus den Punkten C, D, nach einem
lern Winkel des Vielecks F die Diagonalen $\overline{CF}$,
$\overline{F}$, ſo heiſst der Winkel $C\hat{F}D$ nach der vorigen Er-
rung, ſowohl der Seite $\overline{CD}$, als dem Winkel $C\hat{A}D$
gegengeſetzt. So ſind jeder Seite des Vielecks
iel Winkel entgegengeſetzt, als es Seiten im Vieleck
ɔt weniger zwey.

Iſt das Vieleck fähig in dem Kreis beſchrieben zu
:den, ſo ſieht man leicht, daſs alle Winkel, die der-
en Seite gegenüberſtehen, wie $C\hat{A}D$, $C\hat{F}D$, einan-
gleich ſind, man kann alſo unter dem der Seite
entgegengeſetzten Winkel, irgend einen der ſich
$\overline{CD}$ ſtützenden Winkel verſtehen, der ſeinen
itel in einem Punkte des Bogens $\overset{\frown}{CBAFE}$ hat.
ıus folgt

ı jedem Vieleck, das in einem Kreiſe be-
ſchrieben werden kann, ſind alle Win-

kel, die derſelben Seite gegenü
hen, gleich.

Jetzt können wir auch folgenden Satz a
der eine Ausdehnung des Grundſatzes der P
nalität der Seiten eines Dreyecks mit dem Si
gegenüberſtehenden Winkel iſt.

Vier und dreyſsigſter Lehrſatz.

303. In jedem Vieleck, das in
Cirkel beſchrieben werden kann, ver
ſich die Seiten wie die Sinus der
überſtehenden Winkel d. h. wir haben

$$\overline{CD} : \overline{EF} = \sin C\hat{A}D : \sin E\hat{C}F$$

In der That iſt der Radius des Cirkel
(121)

$$\sin C\hat{A}D = \frac{\overline{CD}}{2R}$$

$$\sin E\hat{C}F = \frac{\overline{EF}}{2R}$$

alſo

$$\overline{CD} : EF = \sin C\hat{A}D : \sin E\hat{C}F \text{ w.}$$

304. Soll ein Vieleck in dem Cirkel beſ
werden können, ſo muſs durchaus ein gewiſ
hältniſs zwiſchen ſeinen Winkeln beſtehen.
im Viereck ſind dann die gegenüberſtehenden
Supplemente.

Die Seitenzahl des eingeſchriebenen Viel
anfangs 6, es ſey *ABCDEF* (Fig. 109). Ic
die Diagonale $\overline{BE}$. Im Viereck *BAFE* ſind
gegengeſetzten Winkel Supplemente, alſo

$$B\hat{A}F + B\hat{E}F = E\hat{F}A + E\hat{B}A$$

en so giebt das Viereck $BCDE$

$$B\hat{C}D + B\hat{E}D = E\hat{D}C + E\hat{B}C$$

Addirt man diese beyden Gleichungen und be-
rkt, dass

$$A\hat{B}E + E\hat{B}C = A\hat{B}C$$
$$B\hat{E}F + B\hat{E}D = F\hat{E}D$$

hat man

$$B\hat{A}F + B\hat{C}D + F\hat{E}D = E\hat{F}A + E\hat{D}F + A\hat{B}C$$

Eben so kann man beym 8eck, 10eck u. s. w. fahren, wir haben also folgenden Lehrsatz.

Fünf und dreyssigster Lehrsatz.

In jedem Vieleck, das eine gerade An-l von Seiten hat, und im Kreise einge-rieben werden kann, ist, wenn man die ıkel 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w. bezeichnet, die ıme aller ungeraden gleich der Summe r geraden.

Ist die Seitenzahl ungerade, so kann man den itel des einen Winkels als eine unendlich kleine e betrachten, so erhält das Vieleck (wenn man unendlich kleine Seite mit zählt) eine gerade nzahl, und man kann den Lehrsatz anwenden. y z. B. (Fig. 110.) $ABCDE$ ein eingeschriebe-Fünfeck, wir wollen durch einen Winkel D Tangente $\overline{mDn}$ ziehen, wo man den Punkt D ie unendlich kleine 6te Seite betrachten kann. haben also

$$A + C + E\hat{D}m = B + D + C\hat{D}n$$

Ziehen wir nun den Radius $\overline{KD}$, und den rechten Winkel $= \pi$ so haben wir

$$E\hat{D}m = \pi + E\hat{D}K$$
$$C\hat{D}n = \pi + C\hat{D}K$$

alſo ſubſtituirt

$$A + C + E\hat{D}K = B + E + C\hat{D}$$

Betrachtet man alſo die Theile des W nemlich $C\hat{D}K$, $E\hat{D}K$ als Winkel des Vielecks, man den Lehrſatz auch auf Vielecke von u Seitenzahl ausdehnen.

Sechs und dreyſsigſter Lehrſatz.

305. Es ſollen 3 Kreiſe in einer gezogen ſeyn, die ich durch 1, 2, 3 ſcheiden will, die beyden erſten ſich in den Punkten a, a', ſchneid erſte die 3te in den Punkten b, b', u lich die 2te die 3te in den Punkte dann, behaupte ich, werden die 3 $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$, ſich in einem Punkte den.

aAb (Fig. 111.) ſoll der Kreis 1 ſeyn, zweyte, bCc der dritte. Jeden dieſer Kreiſ wir als den Schnitt einer Kugel anſehen, d Mittelpunkt in der vorgegebnen Ebene hat, d $\overline{aa'}$ den gemeinſchaftlichen Durchſchnitt de flächen 1, 2 auf dieſer Ebene vorſtellen, $\overline{bb'}$ bey 1 und 3, $\overline{cc'}$ eben das bey 2 und 3. De alſo, der den gemeinſchaftlichen Durchſchn 3 Kugelflächen vorſtellt, iſt zu gleicher Zeit

ſer 3 Linien, alſo ſchneiden ſich dieſe Linien in
em Punkte.

Man kann auch dieſen Satz directe, ohne Kugeln
Hülfe zu nehmen, beweiſen, indeſſen ſchien es mir
einfacher. Alſo

Venn 2 Kreiſe *AFBG*, *ACBD* (Fig. 112.) in derſelben Ebene gezogen ſich in den Punkten *A*, *B* ſchneiden, und man die Linie $\overline{AB}$ zieht, dann durch einen Punkt *K*, der willkührlich auf dieſer Linie genommen iſt, zwey Sehnen $\overline{FG}$, $\overline{CD}$ zieht, eine an den Kreis *AFBG*, die andere an den Kreis *ACBD*, ſo ſind die Punkte *F*, *G*, *C*, *D* in einem Kreiſe.

Sieben und dreyſsigſter Lehrſatz.

o6. In jedem Vielecke *ABCDE* (Fig. 151.), es in einer Ebene liegen oder nicht, n man aus irgend einem Punkte im me *K*, an alle ſeine Winkel Linien $\overline{KA}$, $\overline{KC}$ u. ſ. w. zieht, hat man

$$\overline{AB}\,.\,\overline{AK}\cos B\hat{A}K + \overline{BC}\,.\,\overline{BK}\cos C\hat{B}K$$
$$+ \overline{CD}\,.\,\overline{CK}\cos D\hat{C}K + \ldots$$
$$= \overline{AB}\,.\,\overline{BK}\cos A\hat{B}K + \overline{BC}\,.\,\overline{CK}\cos B\hat{C}K$$
$$+ \overline{CD}\,.\,\overline{DK}\cos C\hat{D}K + \ldots$$

Die bekannten Eigenſchaften der Dreyecke geben

$$\overline{AK}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BK}^2 - 2\;\overline{AB}.\overline{BK}.\cos A\hat{B}K$$
$$-\overline{BK}^2 = -\overline{AB}^2 - \overline{AK}^2 + 2\;\overline{AB}.\overline{AK}.\cos B\hat{A}K$$
$$\overline{BK}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CK}^2 - 2\;\overline{BC}.\overline{CK}.\cos B\hat{C}K$$
$$-\overline{CK}^2 = -\overline{BC}^2 - \overline{BK}^2 + 2\;\overline{BC}.\overline{BK}.\cos C\hat{B}K$$

u. ſ. w.

Addirt und reducirt man, so erscheint
weisende Formel.

Wir wollen zu jedem der zwey Glie
Gleichung das zweyte addiren, so verwande
Formel in

$$\overline{AB}\left\{\overline{AK}.\cos B\hat{A}K + \overline{BK}\cos A\hat{B}K\right\} + \overline{B}$$
$$C\hat{B}K + \overline{CK}\cos B\hat{C}K + \} + \ldots \text{ u. f. w.}$$
$$= 2\ \overline{AB}.\overline{AK}\cos B\hat{A}K + 2\overline{BC}.\overline{BK}\cos C\hat{B}$$
$$\overline{CK}.\cos D\hat{C}K + \ldots.$$

Die Theile aber des ersten Gliedes v
sich in $\overline{AB}^2$, $\overline{BC}^2$, $\overline{CD}^2$ u. f. w. (251) also
Formel

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \ldots = 2\overline{AB}.\overline{AK}\cos B\hat{A}$$
$$\overline{BK}\cos C\hat{B}K + \ldots..$$

Nimmt man die Seitenzahl unendlich an,
das Vieleck eine Curve, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ u. f. w.
mente, $\overline{AK}$, $\overline{BK}$ u. f. w. radii vectores, u
$C\hat{B}K$, Winkel, die die radii vectores mit
genten machen. Die Quadrate als Grössen
ten Ordnung verschwinden, und das erste G
also $= 0$. So interessante Resultate aus dies
suchung auch hervorgehen, muss ich sie d
beseitigen, da sie dem Gegenstand, den ich
handle, fremdartig sind.

Wir wollen unser System auf 3 rechtw
Axen beziehen. Wir wollen also aus jeder
A, B, C u. f. w. und aus K Perpendikel
Axen senken. Die Perpendikel auf die
sollen $a, b, c, d \ldots\ldots k$
die auf die andere $a', b', c', d' \ldots k'$

auf die dritte $a'', b'', c'', d'' \ldots k''$
en, so haben wir bekanntlich

$\overline{AB} . \overline{AK} \cos B\hat{A}K = \overline{ab} . \overline{ak} + \overline{a'b'} . \overline{a'k'} + \overline{a''b''} . \overline{a''k''}$

$\overline{AB} . \overline{BK} \cos A\hat{B}K = - \overline{ab} . \overline{bk} - \overline{a'b'} . \overline{b'k'} - \overline{a''b''} . \overline{b''k''}$

$\overline{BC} . \overline{BK} \cos C\hat{B}K = \overline{bc} . \overline{bk} + \overline{b'c'} . \overline{b'k'} + \overline{b''c''} . \overline{b''k''}$

.

u. s. w.

Addirt man alle diese Gleichungen und bemerkt, nach dem vorigen Satz, das erste Glied $= 0$ wird, t man

$(\overline{ak} - \overline{bk}) + \overline{a'b'} (\overline{a'k'} - \overline{b'k'}) - \overline{a''b''} (\overline{a''k''} - \overline{b''k''})$
$(\overline{bk} - \overline{ck}) + \overline{b'c'} (\overline{b'k'} - \overline{c'k'}) + \overline{b''c''} (\overline{b''k''} - \overline{c''k''}) + \ldots = 0.$

ne merkwürdige Formel, die jedem Vieleck gehört, in leichtes Mittel bietet es in Gleichung zu setzen, ach den Methoden der analytischen Geometrie delt zu werden. Uebrigens ist dieser Satz nur esonderer Fall eines andern weit allgemeinern, ch sonst wo entwickeln, und hier nur aussprewerde.

llt man sich im Raume ein System von unkten vor, die ich durch 1, 2, 3 u. s. r. bezeichne, und die ihre respectiven tellungen, vermittelst einer Umforung durch unmerkliche Grade veradern, doch so, dass 1 von 2, 2 von 3, . . . der letzte vom ersten immer gleich

weit entfernt bleibe, und
man diese Entfernungen, ode
gemeine System, auf einer b
Ebene; so ist nach Verlauf eine
lich kurzen Zeit, die Summ
Projectionen, wenn man jed
die Summe der Perpendikel
cirt, die von den beyden End
der neuen Richtung auf die
senkt werden, = o, wobey
Perpendikel positiv nimmt, di
innern Flächen der Seiten
ecks fallen, das durch die Proj
entstand, negativ, die auf die
Seite fallenden.

Fünfter Abſchnitt.

ndung der vorigen Theorie auf verſchiedene Unterſuchungen der Elementargeometrie.

Man kann, um eine Aufgabe zu löſen, thoden wählen, die ſynthetiſche, die onometriſche, die der analytiſchen netrie und die vermiſchte.

Die ſynthetiſche Methode ſucht ohne Hülfe der nalyſe, aus den bekannten Eigenſchaften der vorgegebenen Figur, die paſſendſte Conſtruction, um n aufgeſtellten Bedingungen Genüge zu leiſten. 'egen der Unvollkommenheit der Inſtrumente nn dieſe Methode nicht die Genauigkeit der echnung erreichen, aber für manche Künſte, z. die Baukunſt, iſt ſie die nützlichſte, weil ſie ſchnellſte iſt. Sie hat auch noch den Vortheil m Auge des Geiſtes nur wirkliche Gegenſtände mahlen, und bietet dem Scharfſinn der Geoter manche nützliche und angenehme Uebung . Sind die Theile der zu betrachtenden Figur verſchiedenen Ebenen, ſo nennt man ſie be-

schreibende Geometrie, und behandel
Projectionen auf 3 rechtwinklichte Eb
allgemeinen Grundsätzen. Jeder wei
diese Methode Monge'n verdankt.

2) Die trigonometrische Methode besteht
dung einer ununterbrochenen Kette
ecken, zwischen den gegebenen und
ten Theilen der Figur, und durch den
von dem einen zu den andern vermitte
lytischen Formeln der Trigonometrie.

3) Die analytische Methode behandelt
ben, blos durch die Mittel, welche
bietet, indem sie nur das, was zum Au
Bedingungen jeder Aufgabe durchaus
aus der Geometrie nimmt. Sie bezie
ganze Systeme von Linien u. s. w.
winklichte Coordinaten, indem sie na
schaffenheit der Aufgabe die Abstände v
winklichten Ebenen, oder 2 rechtw
Axen braucht. Man sieht leicht, daß
auf Linien zurückgeführt ist, die W
Figur nur mittelbar durch die genio
Functionen ausgedrückt werden könne

Bewunderswürdig durch ihr einfach
förmiges Verfahren durch die Allgemei
sie ihren Untersuchungen giebt, ragt
sche Geometrie weit über die andern
hervor. Es lassen sich freylich Fälle de
ihre Resultate verwickelter scheinen, a
man durch die Elementargeometrie erh
wenn man in einem System *n* Linien

unabhängige Winkel kennt und die andern Winkel ſucht, aber man muſs ſich auch erinnern, daſs der Lehrſatz, daſs in jedem Dreyecke die Summe der Winkel 2 Rechte macht, beynahe allen Sätzen, die ſie von der Geometrie borgt, zum Grunde liegt, und daſs man alſo, wenn man ihn nicht gleich anwendete, ſondern die Auflöſung durch Coordinaten ſuchte, im Kreiſe wieder zu dem Punkte, von dem man ausging, zurückkommt.

Die vermiſchte Methode wählt aus den Mitteln, die allen andern zu Gebrauch ſtehen, diejenigen aus, durch die man am leichteſten das vorgeſteckte Ziel erreicht, wodurch ſie freylich der Einförmigkeit ihrer Verfahrungsarten ſchadet. Dagegen zieht ſie aus den ſchon bekannten Eigenſchaften der Figuren, mancherley Mittel, die Unterſuchung zu vereinfachen, und giebt mitunter elegante Auflöſungen. Bis jetzt iſt ſie am meiſten gebraucht, und Newtons, Boſſuts und Hopitals Werke bieten eine Menge von Beyſpielen dar. Auch ich werde ſie hier befolgen, da ſie am meiſten geeignet iſt, in beſondern Fällen die Anwendung der vorher gefundenen Eigenſchaften und der Theorie über die Correlation der Figuren zu zeigen. Mehrere Beyſpiele, die ich geben werde, ſind aus bekannten Werken gezogen, aber auf meine Manier aufgelöſt, andere ſind, wie ich glaube, noch nicht behandelt. Uebrigens iſt meine Abſicht ganz und gar nicht, eine vollſtändige Abhandlung über die Anwendung der Algebra auf die Geometrie zu ſchreiben.

308. Mehrere große Geometer haben
ständige Abhandlung des Vierecks und selb
ecks überhaupt gesucht. Da aber die not
Formeln beynahe unzählbar werden, so w
der Seiten über 4 geht, so habe ich dem
helfen gesucht, indem ich Tafeln für alle
Vielecks bilde (so wie die im 3ten Abschn
Dreyeck). Eine solche Tafel giebt doch im
bloße algebraische Umformungen, alle Form
man in jedem besondern Falle bedarf.

Man kann diese Methode der Tafeln au
die nicht in einer Ebene liegen, und selbst
der erstrecken. Dieser Abschnitt enthält
deutung der Auflösung aller nöthigen Aufg
diesen Zweck zu erfüllen, wodurch man
vorher gegebenen Erklärungen die Mittel e
Aufgaben, zu denen die Analysis ohne I
rechnung gelangen kann, auf schon aufgelöst
form aufgestellte zurückzubringen.

Sechs und zwanzigste Aufgabe

309. **Ein rechtwinklichtes Drey (Fig. 113.) ist gegeben, man soll z den Catheten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, eine Linie gegebner Größe ziehen, die von d thenuse in m in zwey gleiche Th theilt wird.**

Ich nehme die Linie $\overline{Am}$ als Unbekan
die gegebene $\overline{FG}$ sey $= b$.

Wenn wir aus dem Punkte m mit dem
ser $\overline{mF}$ einen Kreis beschreiben, so wird di

h durch den Punkt G gehen, da nach der An-
me $\overline{mF} = \overline{mG}$, und weil der Winkel $F\hat{A}G = R$
d er auch durch A gehen, also $\overline{Am} = \overline{mF} = \frac{1}{2}b$
r

$$x = \frac{1}{2}b$$

zu finden war.

Wäre folgende Aufgabe zu behandeln:

Wenn das rechtwinklichte Dreyeck ABC gegeben ist zwischen den verlängerten Catheten eine Linie FG' zu ziehen, von gegebener Gröſse, und die von der verlängerten Hypothenuſe in m', in 2 gleiche Theile getheilt werde;

ürde man eben wie vorhin $\overline{Am'} = \frac{1}{2}b$ finden, d.
er Punkt m' wäre der zweyte Durchschnitts-
t der Hypothenuſe, mit dem vorher beschriebe-
Kreiſe.

Alſo geben die Punkte m, m', die Auflöſungen
allgemeinen Aufgabe, die die vorigen als partielle
ben umfaſst.

Wenn ein rechtwinklichtes Dreyeck gegeben iſt, zwiſchen den Richtungen der Catheten eine Linie von gegebener Gröſse zu ziehen, die durch die Richtung der Hypothenuſe in 2 gleiche Theile getheilt werde.

die allgemeine Aufgabe zwey Auflöſungen hat,
ſs ſie natürlich auf eine Gleichung vom 2ten
führen. Da wir indeſſen eine Unbekannte an-
n, die in beyden Fällen dieſelbe bleibt, ſo ka-
vir nur auf eine Gleichung vom 1ſten Grade.

Man sieht daraus, wie vortheilhaft es sey,
zu wählen, die bey allen oder doch den m
lösungen dieselben bleiben. Hätte man
genommen, so würde man dieses Vorthei
gegangen seyn. Die Gleichung wäre auf de
Grad gestiegen, und hätte zwey positiv
$\overline{Bm}$, $\overline{Bm'}$ gehabt.

Hätte man $\overline{AF}$ genommen, so wäre
chung ebenfalls auf den 2ten Grad gesti
Wurzel wäre positiv, die andere negativ ge
eine hätte F, und die andere im entgeg
Sinn getragen, F' gegeben. Daraus folgt
dafs $\overline{AF'}$ eine negative Quantität sey, sie
zu denen, die ich inverse genannt habe.

Diese andere im entgegengesetzten Sin
Wurzel, kann nicht als eine zweyte Au
partiellen in Gleichung gesetzten Problems
werden, sie ist vielmehr die Auflösung des
tiellen Problems, das nicht in Gleichu
ist, sie zeigt blos dies letzte, dem er
loge, Problem an. So ist es überhaupt.
spricht eine negative Wurzel der Aufgabe,
chung gesetzt ist, sie zeigt ebenso wie die
Wurzeln analoge Untersuchungen oder pa
bleme an, die man durch sie auflösen kann.

Nur zufälligerweise mufste man in d
Aufgabe F, F' in entgegengesetztem Sinne
A nehmen. Bey vielen andern Aufgaben
die entgegengesetzten Wurzeln schief, ja sel
selben Sinne, wie die positiven nehmen,

e wir vorher gezeigt haben, durchaus keine feste
gel in dieser Hinsicht giebt.

Sieben und zwanzigste Aufgabe.

310. Zwey grade Linien $\overline{B'B'''}$, $\overline{CC''}$
g. 114.) schneiden sich unter einem ge-
enen Winkel $B\hat{K}C$, aus einem Punkte H
der Ebene dieses Winkels, der auf der
ie $\overline{KH}$ liegt, die eben den Winkel in 2
che Theile theilt, eine Linie $\overline{BC}$ von
ebener Gröfse zu ziehen, die durch
$'''$, $\overline{CC''}$ begränzt werde.

ch nehme den Winkel $K\hat{H}B$ als Unbekannte, es
lso

$$K\hat{H}B = x$$
$$\overline{BC} = a$$
$$\overline{KH} = b$$
$$B\hat{K}H = \tfrac{1}{2}\, B\hat{K}C = m$$

as Dreyeck BKH giebt

$$BH : b = \sin m : \sin (m + x)$$

$$H = \frac{b \cdot \sin m}{\sin\ x - m)}$$

benso giebt das Dreyeck CKH

$$H = \frac{b \cdot \sin m}{\sin (x - m)}$$

man, so kommt

$$= \frac{b \sin m}{\sin (x + m)} - \frac{b \sin m}{\sin (x - m)}$$

$$a \cdot \sin(x+m) \sin(x-m) = b \sin m \{\ldots$$
$$+ \sin(x-m)\}$$

Weil nun

$$\sin(x+m) + \sin(x-m) = 2 \sin x \cos \ldots$$

$$\sin(x+m) \sin(x-m) = \sin x^2 - \sin \ldots$$

so wird die vorige Gleichung

$$a \sin x^2 - a \sin m^2 = 2b \sin m . \cos m . \ldots$$

oder weil

$$2 \sin m . \cos m = \sin 2m$$

$$\sin x^2 - \frac{b}{a} \sin 2m . \sin x = \sin m^2$$

also

$$\sin x = \frac{b}{2a} \sin 2m \pm \frac{1}{2a} \surd (4aa \sin \ldots$$
$$\sin 2m^2)$$

Setzt man den Winkel $B\hat{K}C$ = einem ... ist $\sin 2m = 1$, $\sin m^2 = \frac{1}{2}$ also

$$\sin x = \frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \surd (2aa + bb)$$

Obgleich die Gleichung nur vom zwey... ist, kann man doch die 4 Auflösungen, dere... gabe fähig ist, daraus ziehen, denn da di... beyden Seiten der Linie $\overline{KH}$ symmetrisch i... die beyden Auflösungen, die sie für eine S... auch auf der andern anwendbar, so dafs di... chen Stellungen der Linie BC folgende sind...

$$\overline{BC}, \overline{B'C}, \overline{B''C''}, \overline{B'''C'''}$$

Die gefundene Gleichung giebt auch d... 4 Auflösungen, da der Sinus eines Winkels ... des Supplements dieses Winkels derselbe ist.

Acht und zwanzigſte Aufgabe.

311. Ein Kreis BDC und zwey Tangen-
n $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ſind gegeben, zwiſchen dieſen
ngenten eine dritte Tangente zu zie-
n, die einer gegebenen Linie gleich ſey
g. 115.)

Wir wollen als Unbekannte die Segmente $\overline{DE}$,
der geſuchten Tangente nehmen, und vorausſetzen,
ey

$$\overline{DE} \text{ oder } \overline{BE} = x$$
$$\overline{DF} \text{ oder } \overline{CF} = y$$

die gegebene Linie $\overline{EF} = a$
die bekannte Linie $\overline{AB}$ oder $\overline{AC} = b$
der bekannte Winkel $B\hat{A}C = k$

Vir haben alſo aus den Bedingungen der Auf-

$$x + y = a$$

Ferner

$$\overline{EF}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AF}^2 - 2\,\overline{AE}\,.\,\overline{AF}\,.\,cof\,B\hat{A}C$$

weil

$$\overline{BE} = \overline{DE},$$
$$\overline{CF} = \overline{DF},$$
$$a = (b + x)^2 + (b + y)^2 - 2(b + x)(b + y)$$
$$cof\,k$$

nun

$$+ y = a$$
$$a = 2\,(bb + ab)\,(1 - cof\,k) + xx + yy -$$
$$2\,xy\,cof\,k$$

uirt man in dieſer Gleichung für y ſeinen Werth
ſo hat man

$$(xx - ax)(1 + cos\,k) + (bb + ab)(1 -$$

oder

$$xx - ax + (bb + ab)\frac{1 - cos\,k}{1 + cos\,k} = o$$

alſo

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \surd\{\tfrac{1}{4}aa - (bb + ab)\frac{1 - cos}{1 + cos}$$

Dieſe Gleichung hat 2 poſitive Wurzel beyden Tangenten $\overline{EF}$, $\overline{E'F}$, die ſymmetri geben. Indeſſen hat die Aufgabe 4 Auflöſunger Anſetzung der Gleichung ſetzten wir voraus, d ſiele auf die Verlängerung von $\overline{AC}$, es iſt ab Grund vorhanden, warum er eher dahin andere Seite nach F'' fallen ſoll. In der T man von dieſer Vorausſetzung ausgeht, ſo

$$xx + ax + (bb - ab)\frac{1 - cos\,k}{1 - cos\,k} = o$$

alſo

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \surd\{\tfrac{1}{4}aa - (bb - ab)\frac{1}{1}$$

eine Gleichung, die die beyden neuen ſym Auflöſungen $\overline{E''F''}$, $\overline{E'''F'''}$ giebt, die e man die poſitive Wurzel von B nach E'', d wenn man die negative Wurzel von B trägt.

Neun und zwanzigſte Aufgab

312. Wenn zwey beliebige Dur in einem gegebnem Kreiſe gezog unbeſtimmt verlängert ſind, an Kreis eine Tangente $\overline{EF}$ zu ziehen

e Theile $\overline{DE}$, $\overline{DF}$, dieser Tangente, die
vischen dem Berührungspunkt D und je-
m der Durchmesser $\overline{EE''}$, $\overline{FF''}$ liegen, in
gebnem Verhältnisse seyen.

Es sey A der Mittelpunkt des Kreises und der
bmesser AD an den Berührungspunkt gezogen.
Unbekannte nehme ich die Winkel $E\hat{A}D$, $F\hat{A}D$.
ı seyen

$$E\hat{A}D = u$$
$$F\hat{A}D = z$$
$$E\hat{A}F = k$$

Verhältniss der Segmente $\overline{ED}$, $\overline{DF} = a$

Nun sind aber die Segmente den Tangenten der
ɩel $E\hat{A}D$, $F\hat{A}D$ proportional, also

$$\frac{tg\,u}{tg\,z} = a \text{ oder } tgu = atgz$$

er hat man offenbar $k = u + z$ Also

$$tgk = \frac{tg\,u + tg\,z}{1 - tg\,u\,.\,tg\,z}$$

$$gk - tgk\,tgu.tgz = tgu + tgz$$

$$gk - a\,tgk.tgz^2 = (a+1)\,tgz \text{ oder}$$

$$z^2 + tgz\,\frac{a+1}{atgk} - \frac{1}{a} = 0$$

$$z = -\frac{a+1}{2\,a\,tg\,k} \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{a+1}{2\,a\,tg\,k}\right)^2 + \frac{1}{a}\right\}}$$

ıch der Theorie der goniometrischen Funktio-
ebt die positive Wurzel den Punkt D, der im
l $E\hat{A}F$, der Hypothese gemäss begriffen ist, und

die negative Wurzel den Punct D' im S
Winkel $F'\hat{A}E'$ genommen.

Aber man ſieht leicht, daſs, wenn man
meſſer $\overline{DD''}$ zieht, und durch den Pun
Tangente $\overline{E''F''}$, dieſe Tangente eben ſo w
der ſie parallel und gleich iſt, die Bedin
Aufgabe erfüllen wird. Eben ſo wenn
D' den Durchmeſſer $\overline{D'D'''}$, und durch D'
g nte $\overline{E'''F'''}$ zieht, wird auch dieſe Tan
ſo gut als $\overline{EF}$ den Bedingungen der Aufga
leiſten.

Alle dieſe 4 Auflöſungen ſind in de
nen Gleichung enthalten, weil $tg\,z$ ſowo
Bogen z, als zu dem Bogen $2\pi + z$ g
π den rechten Winkel bedeutet). So gieb
tive Wurzel der Puncte D, D'', die negativ

Aber die Aufgabe hat noch 4 andere A
die nicht in der Gleichung enthalten ſind. N
auf dem Umkreiſe im Winkel $B\hat{A}C'$ (Fig.
Punkt d, ſo daſs, wenn man durch dieſen
Tangente zieht, die die gegebnen Durchm
und f ſchneidet, $\overline{de}$ und df in gegebenem
ſtehen. Nach den Worten der Aufgabe
Punkt d ihr Genüge, und es muſs noch ein
Punkt am Ende des Durchmeſſers ſeyn, de
gezogen iſt. Dieſe Auflöſungen nun ſind ni
vorigen Gleichung enthalten; um ſie zu erha
man die Rechnung auf der neuen Vorausſ
fangen, nicht daſs $k = u + z$, ſondern daſs
So erhält man

$$tg\,z = \frac{1-a}{2\,a\,tg\,k} \pm r\left\{\left(\frac{1-a}{2\,a\,tg.k}\right)^2 - \frac{1}{a}\right\}$$

Man kann alle diese Auflösungen in einer einzi-
n Formel vereinen, nämlich

$$tg\,z = -\frac{a \pm 1}{2\,a\,tg.k} \pm r\left\{\left(\frac{a \pm 1}{2\,a\,tg.k}\right)^2 \pm \frac{1}{a}\right\}$$

Dreyssigste Aufgabe.

313. Zwey Kreise *MBm*, *NCn*, (Fig. 118.) ıd in derselben Ebene beschrieben, man ll aus einem Punkte *H*, der willkührlich f der Linie angenommen ist, die durch e Mittelpunkte geht, eine grade Linie ', zwischen den beyden Kreisen ziehn, die H nach gegebenem Verhältnisse getheilt y.

Als Unbekannte wollen wir die Linie $\overline{CH}$ annehmen. r nennen ferner

$$CH = x$$

gegebene Verhältniss

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{CH}} = a$$

$$\overline{MB} = R$$

$$\overline{NC} = r$$

$$\overline{MH} = m$$

$$NH = n$$

Da die beyden Dreyecke *MBH*, *NCH* einen chen Winkel in *H* haben, müssen wir nach (206.) alten

$$(\overline{MH}^2 + \overline{BH}^2 - \overline{MB}^2) \,.\, \overline{CH} \,.\, \overline{NH} = (\overline{NH}^2 + \overline{CH}^2 - \overline{NC}^2)\, \overline{BH} \,.\, \overline{MH} \text{ oder}$$

$$(mm + aaxx - RR)\, nx = (nn +$$

$$amx$$

woraus man

$$x = r\,\frac{amnn - mmn + nRR - amrr}{naa - am}$$

erhält.

Ich lasse das doppelte Zeichen vor de[r]
weg, weil die negative Wurzel hier unbede[utend ist,]
wenn man sie nicht als die Anzeige eine[r]
Auflösung ansehen will, zu der man gelang[t, wenn]
man auf der andern Seite der Linie $\overline{MN}$,
Kreise, dessen Mittelpunkt in N ist, einen [P]
in derselben Entfernung als C nimmt, weil [...]
symmetrisch ist.

Ein und dreyssigste Aufgabe.

314. Durch zwey willkührlich a[uf dem]
Umkreis eines Cirkels angenommene[n Punk]
te zwey Sehnen zu ziehen, die sich
einem gegebenen Winkel schneide[n ...]
zu einander in gegebenem Verhältn[isse ste]
hen.

Es sey $ABDC$ (Fig. 54.) der Kreis A,
die beyden Punkte, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ die Sehnen, A
Winkel, den sie bilden sollen.

Ich ziehe die Linien $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, und ne[hme als]
Unbekannte die beyden Winkel $B\hat{A}D$, $C\hat{A}D$.

Ferner sey

$$B\hat{A}D = m$$
$$C\hat{A}D = n$$
$$A\hat{E}C = k$$
$$\overline{AB} = a$$
$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = b$$

Radius des Kreises $= R$.

Aus der Aufgabe XXI. (178.) haben wir (Formel 27)

$$a = 2\, R\, \sin\, (k + n)\; .\; .\; .\; .\; .\; (A)$$

l wenn wir die 28ste durch die 25ste Formel diviren

$$b = \frac{\sin\, (k + n - m)}{\sin\, (m + n)}$$

r

$$b\, .\, \sin (m + n) = \sin (k + n - m)\; .\; .\; .\; .\; .\; (B)$$

Man soll m, und n aus diesen beyden Gleichun- bestimmen.

Entwickele ich die erste, so kommt

$$a = 2\, R\, .\, \sin k \cos n + 2\, R \sin n\, .\, \cos k$$

r

$$a - 2\, R \sin k \cos n = 2\, R \sin n\, .\, \cos k.$$

drirt giebt

$$aa - 4\, a\, R \sin k \cos n + 4\, RR \sin k^2 \cos n^2 = 4 RR \cos k^2 - 4\, RR \cos k^2\, .\, \cos .\, n^2$$

r

$$4\, RR \cos n^2 - 4\, a\, R \sin k \cos n + aa - 4\, RR \cos k^2 = 0$$

woraus man

$$\cos n = \frac{a \sin k}{2R} \pm \frac{\cos k}{2R} \surd (4RR -$$

und folglich

$$\sin n = \frac{a \cos k}{2R} \pm \frac{\sin k}{2R} \surd (4RR - a$$

zieht. Um m zu finden, entwickele ich die (B); sie giebt mir

$$b \sin m . \cos . n + b \sin n . \cos m = \sin$$
$$\cos m - \sin m . \cos (k + n)$$

oder

$$\sin m \{ b \cos n + \cos (k + n) \} = \cos$$
$$(k + n) - b \sin n \}$$

also

$$tg\, m = \frac{\sin (k + n) - b \sin n}{b . \cos n + \cos (k + n)}$$

Die Gleichung (A) giebt $\sin (k + n) = \frac{a}{2}$

folglich

$$\cos (k + n) = \frac{1}{2R.} \surd (4RR - aa)$$

Substituirt man diese Werthe, so erhalten wi

$$tg\, m = \frac{a - 2 b R \sin n}{2bR \cos n + \surd (4RR - aa)}$$

oder wenn wir auch die für $\sin n$, und $\cos$ denen Werthe substituiren

$$tg\, m = \frac{a - ab \cos . k \mp b \sin k \surd (4RR -}{ab \sin k \pm b \cos k \surd (4RR - aa) + \surd (4}$$

$$= \frac{a - b (a \cos k \pm \sin k \surd (4RR - a}{\surd (4RR - aa) + b (a . \sin k \pm \cos k \surd (4R}$$

Zwey und dreyſsigſte Aufgabe.

315. Durch einen beliebigen in der
ɔene eines gegebenen Kreiſes liegenden
ınkt E, zwey auf einander ſenkrechte
hnen zu ziehen, die zu einander in gege-
nem Verhältniſs ſtehen.

L (Fig. 119.) ſey der Mittelpunkt des Kreiſes.
r wollen die Linie LE zu dem gegebenen Punkt
ıen. Ich nehme die beyden geſuchten Corden
), $\overline{BC}$ als Unbekannte an, und nenne

$$\overline{AD} = x$$

$$BC = y$$

$$\frac{x}{y} = a$$

Halbmeſſer $= r$

$$\overline{LE} = b$$

haben alſo die beyden Gleichungen

$$x = ay$$

$$xx + yy = 8rr - 4bb$$

ch Subſtitution wird aus der zweyten

$$yy\,(1 + aa) = 8rr - 4bb$$

$$y = \sqrt{\frac{8rr - 4bb}{1 + aa}}$$

folglich

$$x = a\sqrt{\frac{8rr - 4bb}{1 + aa}}$$

Ich laſſe das Zeichen — vor dem Wurzelzeichen
, weil es ganz ohne Bedeutung hier iſt. Doch
man leicht, daſs die Aufgabe in der That zwey
ſungen hat (Fig. 120.), von denen die eine durch

$\overline{AD}$, $\overline{BC}$, die andere durch $\overline{A'D'}$, $\overline{B'C'}$
wird. Auch diefs ift alfo ein Beleg zu u
hauptung, dafs die Analyfis bald überflüffig
nütze Wurzeln (blofse algebraifche Forme
bald nur einige von allen, die der Aufgab
leiften können.

Wenn die Sehne $\overline{AD}$ bekannt ift, fo k
Aufgabe darauf zurück, durch den gegeben
E im Kreife, die gegebene Sehne $\overline{AC}$ zu zie
ches leicht ift, denn wenn man willkührlich
eine Sehne $\overline{ad} = \overline{AD}$ nimmt, und aus L
einen Bogen befchreibt, der $\overline{ad}$ in e fchneid
man $\overline{ed} = \overline{ED}$, und kann diefe Linie an d
E tragen.

Eben fo würde man den Fall auflöfen,
aufserhalb des Kreifes wäre, aber man fie
dafs dann die Aufgabe unmöglich wird, wer

$$4bb > 8rr$$

oder

$$b > r\sqrt{2}$$

Durch diefelbe Eigenfchaft der Sehnen f
die Auflöfung, wenn man ftatt des Verhält
Sehnen, ihre Summe, Differenz u. f. w. ken

Drey und dreyfsigfte Aufgabe.

§. 316. Aus einem beliebigen Pun
nerhalb oder aufserhalb einer Kuge
auf einander fenkrechte Sehnen zu
die in gegebenem Verhältniffe find

Wir wollen als Unbekannte die drey g
Sehnen annehmen.

Es ſey ferner

die eine $= x$

die andere $= y$

die dritte $= z$

Halbmeſſer der Kugel $= r$

Die Entfernung des Mittelpunkts von dem Punkte, ſie ſich ſchneiden ſollen

$$= b$$

$$\frac{x}{z} = a$$

$$\frac{y}{z} = b$$

Wir haben alſo die 3 Gleichungen

$$x = az$$

$$y = cz$$

$$xx + yy + zz = 12rr - 8bb$$

Subſtituirt man aus den beyden vorigen in die :, ſo wird

$$zz(1 + aa + cc) = 12rr - 8bb$$

$$z = \sqrt{\frac{12rr - 8bb}{1 + aa + cc}}$$

$$y = c\sqrt{\frac{12rr - 8bb}{1 + aa + cc}}$$

$$x = a\sqrt{\frac{12rr - 8bb}{1 + aa + cc}}$$

:h habe das doppelte Wurzelzeichen weggelaſſen, lie negativen Wurzeln hier ohne Bedeutung ſind. ieht leicht, daſs die Aufgabe unendlich viel Aufen hat. Stellt man ſich durch den Punkt, wo Sehnen ſich ſchneiden, einen Durchmeſſer vor,

ſo werden offenbar alle Sehnen, die du
Punkt gehen, und denſelben Winkel als
Durchmeſſer machen, gleich ſeyn, und alſo
nommen werden können. Man kann di
beſtimmt machen, wenn man die Bedingu
ſetzt, daſs x ſich in einem beſtimmten gröſs
befinden ſoll, der durch den gegebenen P
Dann hat die Aufgabe 6 Auflöſungen, weil
bar x, y, z, auf alle mögliche Weiſe, eine
dere ſetzen kann, was 6 verſchiedene C
nen giebt.

Die Aufgabe wird unmöglich, wenn

$$b > r \sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

Vier und dreyſsigſte Aufgabe.

317. Durch einen beliebigen Pu
nerhalb oder auſserhalb einer Kug
auf einander ſenkrechte Ebenen zu
ſo daſs die Flächen der 3 Kreiſe,
den Durchſchnitten dieſer Ebenen
Kugel entſtehen, in gegebenem
niſſe ſtehen.

Wir wollen als Unbekannte die Halbm
3 geſuchten Kreiſe annehmen, ſo werden
Flächen dieſer Kreiſe, wie die Quadrate der
ſer verhalten. Es ſey

der eine Halbmeſſer $= x$
der andere $= y$
der dritte $= z$

$$\frac{xx}{zz} = a$$

$$\frac{yy}{zz} = c$$

Halbmesser der Kugel $= r$

Entfernung des Punktes, wo sich die 3 Ebenen
ıeiden, vom Mittelpunkte $= b$

Wir haben also folgende Gleichungen

$$xx = azz$$

$$yy = czz$$

$$xx + yy + zz = 3rr - bb$$

ıus wird durch Substitution

$$zz\,(1 + a + c) = 3rr - bb$$

$$z = \sqrt{\frac{3rr - bb}{1 + a + c}}$$

$$y = \sqrt{c\,\frac{3rr - bb}{1 + a + c}}$$

$$x = \sqrt{a\,\frac{3rr - bb}{1 + a + c}}$$

Man kann dieselben Bemerkungen über die Wur-
hier machen, wie bey der vorigen Aufgabe.

Fünf und dreyfsigste Aufgabe.

ı18. Wenn man die Winkel eines Drey-
ABC (Fig. 121.) kennt, und die Ent-
ungen jeder Seite von einem Punkte
er in derselben Ebene liegt, die 3 Sei-
les Dreyecks zu finden.

Vir wollen mit *A*, *B*, *C*, die drey gegebenen
el des Dreyecks bezeichnen, mit *a*, *b*, *c*, die ge-

genüberſtehenden Seiten, mit a', b', c', d
dikel aus D auf dieſe Seiten.

Aus D ziehe ich nach den Winkeln
grade Linien, dann iſt offenbar die Fläche
ecks ABC, gleich den Flächen der beyden
ABD, ACD weniger der Fläche des Drey
d. h.

$$\overline{\overline{ABC}} = \overline{\overline{ABD}} + \overline{\overline{ACD}} - \overline{\overline{BCD}}$$

Aber

$$\overline{\overline{ABC}} = \tfrac{1}{2}\overline{AB}\,.\,\overline{AC} = \tfrac{1}{2}bc\,.\,\mathit{ſin}\ A$$
$$\overline{\overline{ABD}} = \tfrac{1}{2}cc'$$
$$\overline{\overline{ACD}} = \tfrac{1}{2}bb'$$
$$\overline{\overline{BCD}} = \tfrac{1}{2}aa'$$

wir haben alſo

$$bc\,.\,\mathit{ſin}\ A = bb' + cc' - aa'$$

Nun iſt ferner

$$b = a\,.\,\frac{\mathit{ſin}\ B}{\mathit{ſin}\ A}$$

$$c = a\,.\,\frac{\mathit{ſin}\ C}{\mathit{ſin}\ A}$$

Subſtituirt und dividirt man durch $\mathit{ſin}\ B\,.$
kommt

$$a = \frac{b'\,.\,\mathit{ſin}\ B + c'\,.\,\mathit{ſin}\ C - a'\,.\,\mathit{ſin}}{\mathit{ſin}\ B\,.\,\mathit{ſin}\ C}$$

$$b = \frac{b'\,.\,\mathit{ſin}\ B + c'\,.\,\mathit{ſin}\ C - a'\,.\,\mathit{ſin}}{\mathit{ſin}\ A\,.\,\mathit{ſin}\ C}$$

$$c = \frac{b'\,.\,\mathit{ſin}\ B + c'\,.\,\mathit{ſin}\ C - a'\,.\,\mathit{ſin}}{\mathit{ſin}\ A\,.\,\mathit{ſin}\ B}$$

Läge der Punkt D im Dreyecke, ſo wi
vers und veränderte ſein Zeichen.

Man kann auch leicht ohne Rechnung durch Conruction einer ähnlichen Figur (193.) die Aufgabe ſen.

Uebrigens ſieht man leicht, daſs man die Auflöng auf jedes Vieleck erſtrecken kann.

Sechs und dreyſsigſte Aufgabe.

319. Wenn man die Perpendikel aus n Winkeln des Dreyecks auf die gegenerſtehende Seite kennt, Seiten und Winl des Dreyecks zu finden.

Es ſey ABC (Fig. 122.) das gegebene Dreyeck, b', c' ſollen die aus den Winkeln A, B, C, auf Seiten a, b, c, geſenkten Perpendikel ſeyn.

Aus den Eigenſchaften der Dreyecke haben wir

$$cos\ A = \frac{bb + cc - aa}{2bc}$$

Man weiſs auch, daſs die Perpendikel aus deu ıkeln auf die Seiten geſenkt in inverſem Verhältniſs Seiten ſtehen,

$$b = \frac{aa'}{b'}$$

$$c = \frac{aa'}{c'}$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in die vorige Gleiıg, ſo wird ſie

$$cos\ A = \frac{(a'b')^2 + (a'c')^2 - (b'c')^2}{2\,a'a'\,b'c'}$$

oder

$$cos\,A = \frac{b'}{2c'} + \frac{c'}{2b'} - \frac{b'c'}{2a'a'}$$

und eben so

$$cos\,B = \frac{a'}{2c'} + \frac{c'}{2a'} - \frac{a'c'}{2b'b'}$$

$$cos\,C = \frac{a'}{2b'} + \frac{b'}{2a'} - \frac{a'b'}{2c'c'}$$

so haben wir die 3 Winkel und brauche
Seiten zu suchen.

Das rechtwinklichte Dreyeck *ABH* giebt
$= sin\,B : 1$
also

$$c = \frac{a'}{\sqrt{1 - cos\,B^2}}$$

eben so

$$a = \frac{b'}{\sqrt{1 - cos\,C^2}}$$

$$b = \frac{c'}{\sqrt{1 - cos\,A^2}}$$

Sieben und dreyssigste Aufgabe

320. Ein Dreyeck *FGH* (Fig. 123.)
geben, darum ein anderes Dreyeck
beschreiben, so dass, wenn man au
Winkel des letztern, ein Perpendi
die gegenüberstehende Seite senk
Perpendikel genau in die Punkte
fallen, welche die Scheitelpunkte
sten sind.

Es seyen $\overline{AH}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$ die Perpendikel aus den Winkeln A, B, C auf die gegenüberstehenden Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$.

Die Tafel Aufgabe XVI (167.) giebt uns

$$F\hat{H}G = 2\pi - 2A \text{ oder}$$

$$A = \pi - \tfrac{1}{2} F\hat{H}G \text{ (Form. 28.)}$$

nd eben so (Form. 29, 30.)

$$B = \pi - \tfrac{1}{2} F\hat{G}H$$

$$C = \pi - \tfrac{1}{2} G\hat{F}H$$

e 3 Winkel des Dreyecks ABC sind also bekannt.

Um zu construiren, bemerke man, daſs dieselbe fel (Form. 16, 17, 18.)

$$B\hat{H}F = A$$

$$B\hat{F}H = C$$

$$C\hat{G}H = B$$

bt. Man braucht also nur durch den Scheitel H e Linie $\overline{BC}$ zu ziehen, die mit der gegebenen Linie den Winkel $B\hat{H}F = \pi - \frac{1}{2} F\hat{H}G$ macht, durch Scheitel F eine andere Linie $\overline{AB}$, die mit $\overline{FH}$, Winkel $B\hat{F}H = \pi - \frac{1}{2} G\hat{F}H$ macht, und end- durch G eine Linie $\overline{AC}$, die mit $\overline{GH}$, den Win- $C\hat{G}H = \pi - \frac{1}{2} F\hat{G}H$ macht. Diese 3 Linien , $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, sind die 3 Seiten des gesuchten yecks.

Acht und dreyſsigste Aufgabe.

321. Eine Sehne $\overline{BC}$ (Fig. 124.) ist belie- in einem Kreise gezogen. Auf dem fange dieses Kreises einen Punkt A zu den, so daſs, wenn man die Sehnen , $\overline{AC}$, die Perpendikel auf diese Sehnen

$\overline{AH}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$, und die Linie $\overline{FG}$ zie
Winkel $A\hat{C}E$, den dieſe Linie mit d
pendikel $\overline{AH}$ macht, einem gegeben
kel gleich ſey.

Die 16te Aufgabe (167.) zeigt (Form.
der gegebene Winkel $A\hat{l}F = \pi - (C -$
Winkel A iſt bekannt, weil er auf einer g
Sehne ſteht. Bekanntlich iſt auch

$$2\pi = A + B + C$$

addirt man die beyden Gleichungen, ſo kom

$$2\pi + A\hat{l}F = \pi + A + 2B$$

alſo

$$B = \frac{\pi + A\hat{l}F - A}{2}$$

und

$$C = \frac{3\pi - A\hat{l}F - A}{2}$$

Dieſe Aufgabe, und die vorige, zeigen,
oft vortheilhaft unmittelbar die Winkel beſti
goniometriſche Functionen zu gebrauchen,
dieſe Aufgaben leicht auf eine ſehr verwick
lyſe führen könnten.

Vierzigſte Aufgabe.

322. In einem gegebenen Vier
Quadrat zu beſchreiben.

Es ſey $ABCD$ (Fig. 125.) das Viereck,
geſuchte Quadrat. Da ich das Viereck kenn
ich auch ſeine Winkel. Wäre nun noch ei
von denen bekannt, die durch die gegenſei
des Vielecks und des Quadrats beſtimmt

B. $B\hat{m}n$, ſo würden alle andern durch ſimple Ad-tionen und Subtractionen erhalten. Hätte man die inkel, ſo brauchte man nur den abſoluten Werth r Seite des Quadrats zu ſuchen, wozu das Verhält-s der Seiten eines Dreyecks mit dem Sinus der ge-nüberſtehenden Winkel leicht führt. Ich nehme als Unbekannte die Seite $\overline{mn}$ und den Winkel $\hat{n}n$, und nenne

$$\overline{mn} = y$$
$$B\hat{m}n = z$$

Die 4 Winkel des Vierecks $= A, B, C, D$

$$\overline{AB} = m$$
$$\overline{BC} = n$$
$$\overline{CD} = p$$
$$\overline{DA} = q$$

rechten Winkel $= \pi$

So erhalte ich

$$A\hat{m}q = \pi - z$$
$$A\hat{q}m = \pi - A + z$$
$$D\hat{q}p = A - z$$
$$D\hat{p}q = 2\pi - D - A + z$$
$$m\hat{n}B = 2\pi - B - z$$
$$p\hat{n}C = B + z - \pi$$
$$n\hat{p}C = 3\pi - B - C - z$$

Jetzt iſt es leicht, die Linien der Figur zu be-nen.

Das Dreyeck Bmn giebt

$$\overline{Bn} : \overline{mn} = \sin Bmn : \sin mBn$$

$$\overline{Bn} = \frac{y \cdot \sin z}{\sin B}$$

und

$$\overline{Bm} = \frac{y \,.\, \sin (B + z)}{\sin B}$$

Eben so giebt das Dreyeck *Amq*

$$\overline{Am} = \frac{y \cos (A - z)}{\sin A}$$

das Dreyeck *npC*

$$\overline{nC} = - \frac{y \cos (B + C + z)}{\sin C}$$

Substituirt man diese Werthe in folgende

Gleichungen

$\overline{AB}$ oder $m = \overline{Am} + \overline{Bm}$

$\overline{BC}$ oder $n = \overline{Bn} + \overline{Cn}$

so hat man

$$m = \frac{y \cos (A - z)}{\sin A} + \frac{y \,.\, \sin (B + z)}{\sin B} \;.$$

$$n = \frac{y \sin z}{\sin B} - \frac{y (B + C + z)}{\sin C} \ldots$$

also

$m \,.\, \sin A \,.\, \sin C \,.\, \sin z - m \sin A \,.$
$(B + C + z)$

$= n \,.\, \sin B \,.\, \sin C \,.\, \cos (A - z) + n \sin$
$\sin (B + z)$

Entwickelt man die Quantitäten $\cos$ (B
$\cos (A - z) \sin (B + z)$, so hat man, nach
durch $\cos z$ dividirt hat,

$$tg z = \frac{n \,.\, \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C + n \,.\, \sin B \,.\, \sin C \,.\, c}{m \,.\, \sin A \,.\, \sin C + m \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin (B}$$

$$\frac{\sin A \,.\, \sin B \,.\, \cos (B + C)}{\sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C - n \sin A \,.\, \sin C \,.\, \cos}$$

323. Diese Gleichung vom ersten Grade
eine Auflösung an. Freylich gehören zu

ogen, da aber ihr Unterſchied $= 2\pi$ iſt, ſo iſt die weyte Auflöſung mit der erſten identiſch.

Die Aufgabe in ihrer Allgemeinheit genommen at 3 Auflöſungen, da der Punkt m auch auf der erlängerten Linie jenſeits A, oder B ſeyn könnte. e würde alſo auch auf eine Gleichung vom 3ten rade führen, wenn nicht durch unſere Wahl der nbekannten die 3 Wurzeln rational würden.

Ein und vierzigſte Aufgabe.

324. In einem gegebenem Dreyecke, ein nderes gegebenes Dreyeck zu beſchreien.

Es ſey ABC (Fig. 126.) das Dreyeck, in dem das eyeck abc beſchrieben werden ſoll, ſo daſs die Winl a, b, c ſich auf den Seiten von ABC ſelbſt, oder f deren Verlängerungen befinden.

Als Unbekannte nehme ich den Winkel $A\hat{b}c = z$, eil durch ihn alle anderen gegeben ſind.

Es ſollen nun heiſsen

lie 3 Winkel des Dreyecks ABC A, B, C
lie gegenüberſtehenden Seiten A', B', C'
lie 3 Winkel des Dreyecks abc a, b, c
lie gegenüberſtehenden Seiten a', b', c'
ſt

$$A\hat{c}b = 2\pi - A - z$$
$$C\hat{b}a = 2\pi - b - z$$
$$B\hat{c}a = 2\pi - c - A\hat{c}b = A - c + z$$
$$B\hat{a}c = 2\pi - A - B + c - z$$
$$C\hat{a}b = b - C + z$$

Jetzt kann man alle Segmente $\overline{Ab}$, $\overline{Ac}$, $\overline{Ca}$, $\overline{Cb}$ leicht finden. Es ist nämlich

$$\overline{Ac} = \frac{a \cdot \sin z}{\sin A}$$

$$\overline{cB} = \frac{b \cdot \sin(A + B - c + z)}{\sin B}$$

also

$$C = \frac{a \cdot \sin z}{\sin A} + \frac{b \cdot \sin(A + B - c + z)}{\sin B.}$$

oder wenn man mit $\sin A \cdot \sin B$ multiplici

$$C \cdot \sin A \cdot \sin B = a \cdot \sin B \cdot \sin z + b \cdot \sin$$
$$(A + B - c + z) \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

Durch Entwickelung von $\sin (A + B -$
erhalte ich

$$C \cdot \sin A \cdot \sin B - \{a \sin B + b \cdot \sin A \cos (A -$$
$$\sin z = b \cdot \sin A \cdot \sin (A + B - c) \sqrt{1 - \sin z}$$

also

$$\sin z^2 - \sin z \cdot \frac{2\, C \sin A \cdot \sin B \, \{a \sin B + b}{\{a \cdot \sin B + b \sin A \cdot \cos (A + B - c}$$
$$\frac{\sin (A + B - c)\}}{\sin (A + B - c)^2}$$
$$= \frac{bb \cdot \sin (A + B - c)^2 - CC \cdot \sin A^2 \cdot \sin B^2}{\{a \sin B + b \sin A \cdot \cos (A + B - c)\}^2 + bb \sin (A}$$

eine Gleichung vom 2ten Grade, die doch 4 gen giebt, da zu jedem Werth von $\sin z$ zw schiedene Winkel gehören.

Zwey und vierzigste Aufgabe.

325. Auf einer gegebenen Linie $\overline{MN}$ (Fig. 127.) einen Punkt A zu finden, dessen Entfernungen $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, von zwey gegebenen Punkten B, C in gegebenem Verhältnisse stehen.

Es sey $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = a$, durch B und C ziehe ich die bestimmte Linie $\overline{BCH'}$. Ich theile den Zwischenraum $\overline{BC}$ in dem gegebenen Verhältnisse in H, d. h. ich mache

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{CH}} = a$$

oder

$$\overline{BH} : \overline{CH} = a : 1$$

oder

$$\overline{BH} + \overline{CH} : \overline{BH} = a + 1 : a$$

$$\overline{BH} = \overline{BC}\ \frac{a}{a+1}$$

Eben so bestimme ich auf der Verlängerung von $\overline{BC}$ einen andern Punkt H', so dass $\overline{BH'}$, $\overline{CH'}$ auch in dem gegebenen Verhältnisse stehen, d. h. dass man

$$\overline{BH'} : \overline{CH'} = a : 1$$

$$\overline{BH'} - \overline{CH'} : BH' = a - 1 : a \text{ habe,}$$

woraus man

$$\overline{BH'} = \overline{BC} \cdot \frac{a}{a-1}$$

erhält.

Dann beſchreibe ich auf $\overline{HH'}$ einen K
Umfang die Linie $\overline{MN}$ in zwey Punkten
wird in A, A', die beyde der Aufgal
leiſten.

Denn (199.) der Umkreis $HAA'H'$ i
metriſche Ort aller Punkte, deren Entfern
den Punkten B, C in dem gegebenen Ve
ſtehen.

Will man den analytiſchen Ausdruck
oder $\overline{DA}$, ſo weiſs man, daſs

$$\overline{HH'}^2 = \overline{BH'} \cdot \overline{CH'} - \overline{BH} \cdot \overline{CH} \text{ (19}$$

Nun iſt wie vorhin

$$\overline{CH} = \overline{BC} \frac{1}{a+1}$$

$$\overline{CH'} = \overline{BC} \frac{1}{a-1}$$

alſo

$$\overline{HH'}^2 = \overline{BC}^2 \left(\frac{a}{(a-1)^2} - \frac{a}{(a+1)^2} \right) =$$

Alſo

$$\overline{HH'} = 2a \cdot \overline{BC}$$
$$\overline{DA} = a \cdot \overline{BC}$$

und

$$1 : a = \overline{BC} : \overline{DA} \,.$$

Sollte man ſtatt auf der graden Linie
irgend einer Curve den Punkt A finden, de
fernungen von zwey gegebenen Punkten in
nem Verhältniſſe wären, ſo würden die Pu
der Kreis HAH' die Curve ſchneiden wü
Aufgabe Genüge leiſten.

326. Wäre folgende Aufgabe zu lösen:

3 Punkte B, H, C sind willkührlich auf einer graden Linie angenommen, man soll auf einer andern gegebenen Linie $\overline{MN}$ einen Punkt A finden, so daſs, wenn man von dieſem Punkte, zu den 3 gegebenen Punkten B, H, C 3 Linien zieht, die beyden Winkel $B\hat{A}H$, $C\hat{A}H$ gleich ſind,

würde man nur einen Punkt H' ſuchen müſſen, daſs

$$\overline{BH} : \overline{CH} = \overline{BH'} : \overline{CH'}$$

Beſchriebe man dann über $\overline{HH'}$ einen Kreis, so ...rden die Punkte A, A', wo dieſer Kreis die gege...e Linie $\overline{MN}$ ſchnitte, der Frage Genüge leiſten. ...nn wir ſahen (199.), daſs der Kreis HAH' auch ... geometriſche Ort aller Punkte iſt, die so liegen, ...s $B\hat{A}H = C\hat{A}H$

...27. Hätte man dieſe andere Aufgabe:

Wenn 4 Punkte B, H, C, D willkührlich auf einer gegebenen Linie angenommen werden (Fig. 128.), auſserhalb dieſer Linie einen Punkt A zu finden, so daſs, wenn man die 4 Linien $\overline{AB}$, $\overline{AH}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ ziehet,

$$B\hat{A}H = H\hat{A}C = C\hat{A}D$$

...müſste man erſt, wie vorhin, auf dieſer Linie den ...kt H' ſuchen, so daſs

$$\overline{BH} : \overline{CH} = \overline{BH'} : \overline{CH'}$$

dann den Punkt C', ſo daſs

$$\overline{HC} : \overline{DC} = \overline{HC'} : \overline{DC'}$$

Dann aber $\overline{HH'}$, und $\overline{CC'}$ zwey Krei
ben, ihr Durchſchnittspunkt A wäre d
Punkt.

Drey und vierzigſte Aufgab

328. Man kennt die 3 Winkel ei
ecks, und die Entfernungen der 3
punkte von einem in derſelben E
gebenen Punkte, man ſoll die 3 S
Dreyecks finden.

ABC (Fig. 129.) ſey das gegebene I
der gegebene Punkt. Man kennt alſo di
A, B, C, und ihre Entfernungen $\overline{AD}$,
man ſucht

$$\overline{BC} = a$$
$$\overline{AC} = b$$
$$\overline{AB} = c$$

Mit den Winkeln ſind die Verhältniſſe
gegeben, man braucht alſo nur den abſolu
einer einzigen zu ſuchen.

Ich fange mit der Conſtruction einer
Figur an, indem ich zuerſt ein Dreyeck abc
welches dem Dreyeck ABC ähnlich iſt. I
ich einen Punkt d, der in der neuen Fig
wie D in der alten, und ziehe die Linien
Die Dreyecke ABD, abd werden ähnlich
verhalten ſich die Entfernungen $\overline{ad}$, $\overline{bd}$, wie
und ſind folglich in gegebenem Verhältn
ſchreibt man nun (325.) einen Kreis, der d

ſche Ort aller Punkte iſt, deren Abſtände von *a*, *b*, h wie $\overline{AD}$: $\overline{BD}$ verhalten, ſo wird dieſer Kreis rch den Punkt *d* gehen.

Eben ſo wenn man einen Kreis beſchreibt, der r geometriſche Ort für alle Punkte iſt, deren Abnde von *a*, *c*, ſich wie $\overline{AD}$: $\overline{CD}$ verhalten, wird ſer andere Kreis auch durch *d* gehen. *d* iſt alſo geben und die ganze ähnliche Figur conſtruirt, ſo ſs man durch bloſse Proportionen die geſuchten öſsen finden kann. Es iſt alſo

$$\overline{AB} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{ab}}{\overline{ad}}$$

$$\overline{AC} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{ac}}{\overline{ad}}$$

$$\overline{BC} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{bc}}{\overline{ad}}.$$

Wir kommen noch (332.) auf dieſe Aufgabe ück.

Eben ſo könnte man die Aufgabe auflöſen:

Wenn man alle Winkel kennt, die je zwey von den Kanten einer 3eckigten Pyramide bilden, und die Entfernungen ihrer 4 Scheitelpunkte von irgend einem Punkt im Raume, alle Dimenſionen dieſer Pyramide zu finden.

Vier und vierzigſte Aufgabe

329. Zwey Kreiſe *AFBG, ACBD* geben (Fig. 112.) und eine Sehne einem von ihnen gezogen; dann ſo dem andern eine Sehne $\overline{CD}$ von Gröſse ziehen und ſo daſs die 4 E *F, G, C, D* alle in einem Kreiſe li

Man ziehe die Sehne $\overline{AB}$, und durch *K*, wo ſie die Sehne $\overline{FG}$ ſchneidet, zie Kreiſe *ACBD* eine Sehne $\overline{CD}$ von der Gröſse. Dieſe Conſtruction folgt unmi (306.).

Fünf und vierzigſte Aufgabe.

330. In einem gegebenen K Dreyeck *abc* zu beſchreiben (Fig. ſen 3 Seiten durch 3 gegebene Pun *C* gehen.

Dieſe Aufgabe gilt für ſchwer und meh Geometer haben ſich damit beſchäftigt. C zuerſt eine Auflöſung in den Berliner Men Jahr 1776. Sie iſt ſynthetiſch, ſinnreich, wickelt. Lagrange gab in demſelben Band ſchöne ganz analytiſche, deren Conſtruction 4ten Bande der neuen Petersburger Com auf Eulers Ermunterung gab. Er fügt hin ſie vergeblich auf das eingeſchriebene Vi wenden geſucht, doch hat er bey der Geleg intereſſante Eigenſchaft dieſer Figuren ent tajano fand eine ſehr elegante ſynthetiſche

Durch ähnliche Betrachtungen wird die 2te

$$y = x \cos B - \overline{AE}.\cos(B + A) + \overline{ED}\cos(B + A + E) + \overline{DC}\cos C;$$

ineare Gleichungen, aus denen man leicht den Werth von x und y zieht.

Diese Art der Vielecke ohne Diagonalen u. s. w. u betrachten, nennt man gewöhnlich Polygonometrie. ber die vorige Aufgabe ist weit allgemeiner gefaßt: h betrachte darin das Vieleck mit allen seinen Diaonalen und ins Unendliche verlängerten Seiten, und mfasse auch die Vielecke, die nicht in einer Ebene egen, auf die auch der obige Grundsatz anwendbar, er für die er unzureichend ist.

Ein und funfzigste Aufgabe.

339. Wenn von den 3 Winkeln, die an r Spitze einer dreyeckigten Pyramide rch die 3 Kanten, die sich da vereinin, gebildet werden, und den 3 Winkeln, e eben so an einer andern Spitze derseln Pyramide entstanden sind, 5 gegeben rden, den 6ten zu finden.

Es sey *DBCA* (Fig. 140.) die gegebene 3eckigte amide. Ich vergleiche die Spitzen *D*, *B*, und su- das Verhältniß zwischen den 3 Winkeln $B\hat{D}C$, C, $A\hat{D}B$, und den 3 Winkeln $D\hat{B}C$, $A\hat{B}C$, A.

Es ſey

$$B\hat{D}C = a$$
$$A\hat{D}C = b$$
$$A\hat{D}B = c$$
$$D\hat{B}C = a'$$
$$A\hat{B}C = b'$$
$$D\hat{B}A = c'$$

Das Dreyeck DCA giebt

$$\overline{CA}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{DA}^2 - 2\overline{DC}\,.\,\overline{DA}\,.\,cos$$

Eben ſo haben wir

$$\overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BA}^2 - 2\overline{BC}\,.\,\overline{BA}\,.\,cos$$

aus beyden Gleichungen folgt

$$(\overline{DC}^2 - \overline{BC}^2) + (\overline{DA}^2 - \overline{BA}^2) - 2\overline{DC}\,.\,\overline{D}$$
$$+ 2\overline{BC}\,.\,\overline{BA}\,.\,cos\,C\hat{B}A = 0$$

aber wir haben auch

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{sin\,B\hat{D}C}{sin\,D\hat{C}B}$$
$$\frac{\overline{DC}}{\overline{BD}} = \frac{sin\,D\hat{B}C}{sin\,D\hat{C}B}$$
$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BD}} = \frac{sin\,B\hat{D}A}{sin\,D\hat{A}B}$$
$$\frac{\overline{DA}}{\overline{BD}} = \frac{sin\,D\hat{B}A}{sin\,D\hat{A}B}$$

Zieht man aus dieſen 4 Gleichungen
von $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{BA}$, $\overline{DA}$, und ſubſtituirt
her gefundenen Gleichung, ſo haben wir,
alles mit $\overline{BD}$ dividiren,

$$\frac{\sin D\hat{B}C^2}{\sin D\hat{C}B^2} - \frac{\sin B\hat{D}C^2}{\sin D\hat{C}B^2} + \frac{\sin D\hat{B}A^2}{\sin D\hat{A}B^2} - \frac{\sin B\hat{D}A^2}{\sin D\hat{A}B^2} =$$
$$2 \cos . C\hat{D}A \frac{\sin D\hat{B}C . \sin D\hat{B}A}{\sin D\hat{C}B . \sin D\hat{A}B} -$$
$$2 \cos . C\hat{B}A \frac{\sin B\hat{D}C . \sin B\hat{D}A}{\sin D\hat{C}B . \sin D\hat{A}B} \ldots (A)$$

Dieſe Gleichung enthält noch die Winkel $D\hat{C}B$, $D\hat{A}B$, die eliminirt werden müſſen, welches leicht vermittelſt der Gleichungen

$\sin D\hat{C}B = \sin (a + a')$
$\sin D\hat{A}B = \sin (c + c')$ geſchieht.

Subſtituirt man dieſe Werthe in (A), ſo erhält nan

$$\frac{\sin a'^2}{\sin(a+a')^2} - \frac{\sin a^2}{\sin(a+a')^2} + \frac{\sin c'^2}{\sin(c+c')^2} - \frac{\sin c^2}{\sin(c+c')^2} =$$
$$2 \cos b \frac{\sin a' . \sin c'}{\sin (a + a') \sin (c + c')} -$$
$$2 \cos b' \frac{\sin a . \sin c}{\sin (a + a') \sin (c + c')} \ldots (B)$$

Um die Nenner herauszuſchaffen, braucht man ur mit $\sin (a + a')^2 \sin (c + c')^2$ zu multipliciren, ſo ommt

$$\{\sin a'^2 - \sin a^2\} \sin (c + c')^2 + \{\sin c'^2 - \sin c^2\} \sin (a + a')^2 = 2 \sin (a + a') \sin (c + c') \{\sin a' . \sin c' . \cos b - \sin a . \sin b . \cos b'\}$$

er da

$\sin a'^2 - \sin a^2 = \sin (a' + a) \sin (a' - a)$
$\sin c'^2 - \sin c^2 = \sin (c' + c) \sin (c' - c)$

erhalten wir durch Subſtitution dieſer Werthe und viſion mit $\sin (a' + a) \sin (c' + c)$

$$\sin(a'+a)\sin(c'-c)+\sin(c'+c)\sin$$
$$\sin a' . \sin c' . \cos b - \sin a . \sin c . co$$

340. Wenn die Kante DB senkre
Ebene BCA steht, so wird der Winkel
Projection des Winkels $C\hat{D}A$, und $D\hat{B}C$
rechte. Nennt man nun den rechten V
hat man

$$a' = \pi$$
$$c' = \pi$$

die Gleichung (C) wird also

$$\cos a . \cos c = \cos b - \sin a . \sin c . co$$

eine Gleichung, die den Projectionswin
wenn man die 3 Winkel a, b, c, die a
dieses Winkels D gebildet werden, elimin

Da in diesem Falle der Winkel $B\hat{D}C$
Complement von $B\hat{C}D$, dem Neigungswi
nie $\overline{BC}$ auf BCA ist, und $D\hat{B}A$ oder c,
ment des Neigungswinkels von $\overline{DA}$ a
Ebene, so kann man die vorige Gleichu
Form setzen:

$$\cos C\hat{A}B = \frac{\cos C\hat{D}A - \sin D\hat{C}B . \sin D}{\cos D\hat{C}B . \cos D\hat{A}B}$$

woraus man den Projectionswinkel $C\hat{A}$
kannten Winkels $C\hat{D}A$ in Werthen der N
kel $D\hat{C}B$, $D\hat{A}B$ erhält.

341. Die Formel (D) umfasst in ihr
kelungen die ganze sphärische Trigonome
betrachtet man (Fig. 140, 141.) D als den
einer Kugel, so werden die 3 Winkel B
$B\hat{D}A$, oder a, b, c, die 3 Seiten des

Dreyecks seyn, das auf der Oberfläche der Kugel durch die Durchschnitte der 3 Ebenen *BDC*, *CDA*, *BDA*, entsteht; und der Winkel $C\hat{B}A$ oder b', d. h. der, den der Durchschnitt der beyden Ebenen *BDC*, *BDA* bildet, wird der der Seite *b* entgegenstehende Winkel seyn. Nennt man also die 3 Seiten des sphä-rischen Dreyecks *a*, *b*, *c*, die gegenüberstehenden Win-kel *A*, *B*, *C*, so hat man

$$b' = B$$
$$a' = A$$
$$c' = C$$

nd die Gleichung (D) auf dies sphärische Dreyeck ngewandt

$$\left.\begin{array}{l} \cos a . \cos c = \cos b - \sin a . \sin c . \cos B \\ \text{nd aus eben dem Grunde haben wir} \\ \cos b . \cos c = \cos a - \sin b . \sin c . \cos A \\ \cos a . \cos b = \cos c - \sin a . \sin b . \cos C \end{array}\right\} \ldots (F)$$

Wir können also, wenn 3 von den 6 bey dem härischen Dreyecke vorkommenden Theilen gegeben d, aus diesen Gleichungen die 3 andern bestimmen.

342. Will man diese Gleichungen direct suchen, kann man durch eine einfache Rechnung dahin ge-gen.

Es sey *ABC* (Fig. 142.) das gegebene sphärische eyeck, *D* der Mittelpunkt der Kugel, wir wollen 3 Halbmesser $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$, ziehen, und durch Scheitelpunkt *A*, die beyden Tangenten $\overline{AB'}$, $\overline{AC'}$, at man

$$B'\hat{A}C' = A$$
$$B\hat{D}C = a$$
$$C\hat{D}A = b$$
$$C\hat{D}B = c$$

Die ebenen Dreyecke $AB'C'$, $DB'C'$
$$\overline{B'C'}^2 = \overline{AB'}^2 + \overline{AC'}^2 - 2\,\overline{AB'}.\overline{AC'}.cos\,$$
$$\overline{B'C'}^2 = \overline{B'D}^2 + \overline{C'D}^2 - 2.\overline{B'D}.\overline{C'D}.cos\,$$

zieht man diese beyden Gleichungen v
ab, und setzt den Halbmesser der Kugel
man

$$\overline{B'D}^2 - \overline{AB'}^2 = 1$$
$$\overline{C'D'}^2 - \overline{AC'}^2 = 1$$

also

$$1 + \overline{AB'}.\overline{AC'}.cos\,A - \overline{B'D}.\overline{C'D}.cos\,a$$

oder weil

$$\overline{AB'} = \frac{sin\ c}{cos\ c}$$

$$\overline{AC'} = \frac{sin\ b}{cos\ b}$$

$$\overline{B'D} = \frac{1}{cos\ c}$$

$$\overline{C'D} = \frac{1}{cos\ b}$$

$$1 + \frac{sin\ b\ .\ sin\ c\ .}{cos\ b\ .\ cos\ c\ .}\ cos\ A - \frac{cos\ a}{cos\ b\ .\ c}$$

oder

$$cos\,b.cos\,c = cos\,a - sin\,b.sin\,c.\ cos\,A.$$

343. Man kann bemerken, dass dies
sich unmittelbar aus dem folgern läſst,
gesagt ist, denn $AB'C'D$ ist offenbar

das nicht in einer Ebene liegt, welches nach dem Grundsatze (259.)

$$\overline{AB'}^2 + \overline{AC'}^2 - 2\,\overline{AB'}\,.\,\overline{AC'}\,.\,\cos B'\hat{A}C' = \overline{DB'}^2 + \overline{DC'}^2$$
$$-2\,\overline{DB'}\,.\,\overline{DC'}\,\cos B'\hat{D}C$$

giebt, welches eben die Gleichung ist, die wir fanden.

Man sieht, daſs diese Formel das für sphärische Dreyecke ist, was für gradlinigte Dreyecke die Formel

$$\cos A = \frac{bb + cc - aa}{2bc}.$$

Nennt man in den Gleichungen (F) als Unbekannte $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$, und zieht ihren Werth daraus, so erhält man

$$\cos A\,.\,\cos C = \cos B + \cos b\,.\,\sin A\,.\,\sin C$$
$$\cos A\,.\,\cos B = \cos C + \cos c\,.\,\sin A\,.\,\sin B$$
$$\cos B\,.\,\cos C = \cos A + \cos a\,.\,\sin B\,.\,\sin C.$$

Gleichungen, die mit den ersten von einerley Gehalt sind und die man aus ihnen zieht, wenn man die kleinen und groſsen Buchstaben vertauscht, und dann das Zeichen der Cosinus ändert; was man auch durch die Supplementar-Dreyecke beweisen kann.

Zwey und funfzigste Aufgabe.

344. Die 3 Seiten eines sphärischen Dreyecks *ABC* (Fig. 143.) sind gegeben, dessen Grundlinie in 2 willkührliche Segmente bey *H* getheilt ist, man soll den Transversalbogen $\widehat{AH}$ finden, der durch *A* und *H* geht.

Die Winkel ſeyen

$A, B, C,$

die gegenüberſtehenden Seiten

$a, b\; c,$

die beyden bekannten Segmente

a', a''

der geſuchte Bogen $= b'$

ſo haben wir aus den Dreyecken ABC, A

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \,.\, \cos c}{\sin a \,.\, \sin c}$$

$$\cos B = \frac{\cos b' - \cos a' \,.\, \cos c}{\sin a' \,.\, \sin c \,.}$$

daraus

$$\cos b' = \{\cos b - \cos a \,.\, \cos c\} \frac{\sin a'}{\sin a} + \cos a$$

Dieſe Formel iſt der analog, die wi
Dreyecke (196.) gefunden haben.

Multiplicirt man alles mit $\sin a$, ſo k
$\{\cos b' - \cos a' \,.\, \cos c\} \sin a = \{\cos b - c$
$\sin a'$

Drey und funfzigſte Aufgab

345. Die 3 Seiten eines ſph
Dreyecks ABC (Fig. 143.) ſind
und die beyden Seiten $\widehat{BA}$, $\widehat{BC}$ v
lich in G, H getheilt, man ſoll de
verſalbogen $\widehat{GH}$ finden.

Zu den vorigen Bezeichnungen komm
die beyden Segmente $\widehat{BH}$, $\widehat{CH}$ a',
die beyden Segmente $\widehat{BG}$, $\widehat{AG}$ c', c
die geſuchte Transverſale $\widehat{GH} = b''$

Dann haben wir

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \, . \, \cos c}{\sin a \, . \, \sin c}$$

$$\cos B = \frac{\cos b' - \cos a' . \cos c'}{\sin a' \, . \, \sin c'}$$

Alſo

$$\cos b' = \{\cos b - \cos a \, . \, \cos c\} \frac{\sin a' . \sin c'}{\sin a \, . \, \sin c} + \cos a' . \cos c'$$

Dieſe Formel iſt der (298.) für gradlinigte Dreyecke analog.

Schafft man den Nenner heraus, ſo kommt

$$\{\cos b' - \cos a' . \cos c'\} \sin a . \sin c = \{\cos b - \cos a \, . \, \cos c\} \sin a' . \sin c'$$

Vier und funfzigſte Aufgabe.

346. Wenn von den 6 Theilen eines ſphäriſchen Vierecks, nämlich den 4 Seiten und 2 Diagonalen 5 gegeben ſind, den 6ten zu finden.

$ABDC$ (Fig. 144.) ſey das ſphäriſche Viereck, $\widehat{AD}$, $\widehat{BC}$ die beyden Diagonalen.

Es ſey

$$B\hat{A}C = A$$
$$B\hat{A}D = A'$$
$$C\hat{A}D = A''$$

$\widehat{AB} = m$, $\sin m = m'$, $\cos m = m''$
$\widehat{AC} = n$, $\sin n = n'$, $\cos n = n''$
$\widehat{BD} = p$ $\sin p = p'$ $\cos p = p''$
$\widehat{CD} = q$ $\sin q = q'$ $\cos q = q''$
$\widehat{AD} = r$ $\sin r = r'$ $\cos r = r''$
$\widehat{BC} = s$ $\sin s = s'$ $\cos s = s''$

Weil

$$A = A' + A''$$

ſo haben wir

$1 + 2 \cos A . \cos A' . \cos A'' = \cos A^2 +$
$\cos A''^2$ (A)

Ferner geben die Dreyecke BAC, BA

$$\cos A = \frac{s'' - m'' . n''}{m' . n'}$$

$$\cos A' = \frac{p'' - m''r''}{m'r'}$$

$$\cos A'' = \frac{q'' - n''r''}{n'r'}$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in (A)
plicirt mit $m'm' . n'n' . r'r'$ ſo kommt
$m'm' . n'n' . r'r' + 2 (p'' - m'' . r'') (q''$
$(s'' - m''n'') = m'm' (q'' - n''r'')^2 + n'n' (p$
$+ r'r' (s'' - m''n'')^2$

Eine Gleichung, die nur die 6 Qua
hält, deren Relation man verlangt.

Setzt man in dieſe Gleichung ſtatt d
des Sinus die Einheit weniger dem Quad
ſinus, und führt dann die angegebenen V
aus, ſo hat man

$$\left.\begin{aligned}&-(m''m''+n''n''+p''p''+q''q''+r''r''+s''s'')\\&+(m''m\,.\,q''q''+n''n''.\,p''p''+r''r''.\,s''s'')\\&\cdot 2(m''n''s''+m''p''r''+n''q''r''+p''q''s'')\\&\cdot 2(m''n''p''q''+m''q''r''s''+n''p''r''s'')\end{aligned}\right\}=0$$

347. Dieſe Formel iſt der analog, die wir (331.) r das gradlinigte Viereck gefunden haben. Jeder ɔſinus eines Winkels, der darin vorkommt, kann ırch eine quadratiſche Gleichung gefunden werden, enn die andern 5 bekannt ſind.

Man kann dieſe Aufgabe auch ſo ausdrücken:

Wenn von den 6 Winkeln, welche die 4 Kanten einer viereckigten Pyramide, zu zweyen verbunden, bilden, 5 gegeben ſind, den 6ten zu finden.

Fünf und funfzigſte Aufgabe.

348. Wenn von den 6 Winkeln, welche n den Seitenflächen einer 3eckigten Pyramide, zu zweyen verbunden, gebildet erden, 5 gegeben ſind, den 6ten zu ıden.

Es ſey *ABC* (Fig. 145) die Grundfläche der Pyıide; auf ſie lege ich die Seitenflächen nieder, und le ſie durch die Dreyecke *ADB*, *ADC*, *BDC* vor. ſey

$$\overline{\overline{BCD}} = A$$

$$\overline{\overline{ACD}} = B$$

$$\overline{\overline{ABD}} = C$$

$$\overline{\overline{ABC}} = D$$

Die Winkel, die dieſe Flächen zu
bunden bilden, bezeichne ich ſo:

$$\hat{CD} = m$$
$$\hat{BD} = n$$
$$\hat{AD} = r$$
$$\hat{BC} = s$$
$$\hat{AC} = p$$
$$\hat{AB} = q$$

Wir haben alſo nach (254.) folgende
wenn wir die Coſinus der Winkel wie
zeichnen:

$$A = Bq'' + Cp'' + Dr''$$
$$B = Aq'' + Cs'' + Dn''$$
$$C = Ap'' + Bs'' + Dm''$$
$$D = Ar'' + Bn'' + Cm''$$

Eliminiren wir 3 beliebige der Quant
C, D, ſo verſchwindet die 4te von ſelbſt
ſchaftlicher Factor aller Glieder, und di
wird

$$\{1 - m''m'' - p''p'' - r''r'' - 2m''p''r''$$
$$\{1 - m''m'' - n''n'' - s''s'' - 2m''n''s''$$
$$-\{m''n''p'' + m''r''s'' + n''r'' + p''s''$$
$$+ q''\}^2 = 0$$

oder wenn man alles durch $1 - m''m''$ di

$$1 - (m''m'' + n''n'' + p''p'' + q''q'' + r''r'' + s$$
$$+ (m''m''.q''q'' + n''n''.p''p'' + r''r''.s$$
$$-2(m''n''s'' + m''p''r'' + n''q''r'' + p''q$$
$$-2(m''n''p''q'' + m''q''r''s'' + n''p''r''s'')$$

Sind alſo 5 von den Winkeln gegeben
man den 6ten immer durch eine quadra
chung.

349. Wir wollen annehmen, die 3 Seitenflächen
, B, C seyen unter einander senkrecht, so hat man

$$p'' = 0$$
$$q'' = 0$$
$$s'' = 0$$

Die Gleichung wird also

$$1 = m''m'' + n''n'' + r''r''$$

ie bekannt ist.

Nimmt man die Höhe der Pyramide unendlich an,
werden m, n, r, rechte Winkel und ihre Cosinus
0; die Winkel s, p, q, fallen in die des Dreyecks
C, daſs also

$$s = A$$
$$p = B$$
$$q = C$$

l folglich

$$2\cos A . \cos B . \cos C - \cos A^2 - \cos B^2 - \cos C^2 = 0$$

e Eigenschaft der Winkel jedes Dreyecks.

350. Wir wollen uns vorstellen, aus einem
kte innerhalb der Pyramide sey ein Perpendikel
jede Seitenfläche gesenkt. Diese Linien werden,
zweyen genommen, offenbar Winkel bilden, die
Supplemente derjenigen sind, welche die Seiten-
en bilden, d. h. berechnen wir das Perpendikel,
auf A fällt, mit A' u. s. w. so hat man

$$A'\hat{}B' = 2\pi - A\hat{}B$$
$$A'\hat{}C' = 2\pi - A\hat{}C$$

u. s. w.

Bezeichnet man also diese Winkel mit m', n', p',
$'$, s', d. h.

$$C'\hat{}D' = m$$
$$B'\hat{}D' = n$$
u. s. w.

so hat man

$$m = 2\pi - m'$$
$$n = 2\pi - n'$$
u. s. w.

Substituirt man diese Werthe von n
s in die obige Formel, so giebt sie uns d
das zwischen m', n', p', q', r', s' bestel
Nun geben die obigen Gleichungen

$$\cos m = -\cos m'$$
$$\cos n = -\cos n'$$
u. s. w.

die neue Gleichung wird also mit der e
Form haben, nur daſs das Zeichen des
aus —, + wird.

Da nun die Richtung der Seitenfläc
mide beliebig angenommen ward, so ka
Formel auf die 6 Winkel anwenden, die
verbunden, 4 Linien bilden, die aus eine
Raume nach beliebigen Richtungen gezog
ist also auch auf die 6 Winkel anwend
4 Kanten des Scheitels einer viereckigt
zu zweyen verbunden, unter einander
auch auf die 4 Seiten und 2 Diagonalen
schen Vierecks.

351. Von den 4 aus einem Punkte
Linien wollen wir 3 auf einander senk
men, z. B. die erste, zweyte und dritte.

n, n, s, werden alſo rechte, und ihre Coſinus = o
eyn. Aus der obigen Gleichung wird dann

$$\cos p^2 + \cos q^2 + \cos r^2 = 1$$

ben-daher wird

$$\sin p^2 + \sin q^2 + \sin r^2 = 2$$

. h. wenn 3 beliebige grade Linien auf
inander ſenkrecht ſind, ſo iſt die Summe
er Quadrate der Coſinus der Winkel, die
e mit einer 4ten graden Linie bilden, dem
uadrate des Sinus totus gleich. Die Sum-
e der Sinus eben der Winkel iſt das Dop-
elte von der Summe des Coſinus.

352. Stellt man ſich eine auf dieſer 4. Linie ſenk-
chte Ebene vor, ſo ſind die Winkel, welche die
ndern mit dieſer Ebene bilden, die Complemente
Winkel, die ſie mit der 4ten Linie bilden, alſo
Wenn 3 Linien auf einander ſenkrecht
d, ſo iſt die Summe der Quadrate der
ius der Winkel, die ſie mit irgend einer
ansverſalebene bilden, gleich dem Qua-
te des Sinus totus, und die Summe der
adrate der Coſinus eben dieſer Winkel,
Doppelte der erſten Summe.

Dieſer Satz findet, wie man ſieht, ſeine Anwen-
gen auf die Winkel, welche die Kanten einer
igten Pyramide mit der Grundfläche eben dieſer
mide bilden, wenn dieſe 3 Kanten unter einan-
ſenkrecht ſind.

Man kann zu denſelben Sätzen auf eine andere
kommen, die ich hier entwickeln werde.

353. Es sey $A\hat{K}B$ (Fig. 146.) ein be
kel. Wir wollen in seiner Ebene zwey
senkrechte Axen FF', GG' ziehen, und a
ten A, B, K die Perpendikel $\overline{Aa'}$, $\overline{Aa''}$
$\overline{Kk'}$, $\overline{Kk''}$ auf sie senken, und die Linie
Nun nenne ich die beyden Linien $\overline{KA}$, $\overline{K}$
den Winkel, den sie machen
die Projectionen auf $\overline{FF'}$, $\overline{GG'}$ von A
so haben wir

$$\overline{AB}^2 = \overline{KA}^2 + \overline{KB}^2 - 2\,\overline{KA}.\,\overline{KB}.\,cos\,A\hat{K}$$

Nun ist aber $\overline{AB}$ die Hypothenuse ei
dessen Seiten $\overline{a'b'}$, $\overline{a''b''}$ sind, also

$$\overline{AB}^2 = \overline{a'b'}^2 + \overline{a''b''}^2 = (a'k' - b'k')^2 + (b$$
$$= (a' - b')^2 + (b'' - a'')^2 = a'a' + b'b' +$$
$$- 2a'b' - a''b''$$

Eben so hat man

$$\overline{KA}^2 = a'a' + a''a''$$
$$\overline{KB}^2 = b'b' + b''b''$$

Substituirt man in den 3 ersten Glied
chung (A) die Werthe von $\overline{AB}$, $\overline{KA}$,
letzten Gliede A, B, k für $\overline{KA}$, $\overline{KB}$,
man, nach gehöriger Reduction,

$$A\,.\,B\,.\,cos\,k = a'b' + a''b''$$

d. h. überhaupt

Wenn zwey gegebene Linien
liebigen Winkel bilden, und we
der Ebene dieses Winkels zwey
der senkrechte Axen zieht, so i
duct der beyden gegebenen Lini
Cosinus des Winkels, den sie
ssen, gleich dem Producte der

e er auf alle eingeſchriebenen Vielecke ausdehnte
nd im 4ten Bande der Memoiren der Italiäniſchen
eſellſchaft bekannt machte. Malfatti gab in demſel-
n Bande noch eine Auflöſung des ſo allgemeiner
machten Problems.

Folgende Auflöſung iſt vermiſcht und nähert ſich
r Lagrangiſchen. Ich glaube nur die Anſetzung der
eichung vereinfacht zu haben. Da ſie nicht auf
Dreyeck beſchränkt iſt, will ich ſie ſo aus-
cken:

In einem gegebenen Kreiſe ein Viel-
eck *abcde* zu beſchreiben (Fig. 131.),
deſſen Seiten durch eben ſo viel gege-
bene Punkte *A, B, C, D, E* gehen.

K ſey der Mittelpunkt, man ziehe nach den gege-
n Punkten die Linien $\overline{KA}, \overline{KB}, \overline{KC}, \overline{KD}, \overline{KE}$,
nach den geſuchten $\overline{Ka}, \overline{Kb}, \overline{Kc}, \overline{Kd}, \overline{Ke}$.

Es ſey ferner
Halbmeſſer des Kreiſes
$c, d, e = \overline{AK}, \overline{BK}, \overline{CK}, \overline{DK}, \overline{EK}$
$c', d', e' = A\hat{K}B, B\hat{K}C, C\hat{K}D, D\hat{K}E, E\hat{K}A$.

ls Unbekannte wollen wir annehmen

$$A\hat{K}a = t$$
$$B\hat{K}b = u$$
$$C\hat{K}c = x$$
$$D\hat{K}d = y$$
$$E\hat{K}e = z$$

n giebt das Dreyeck *AKb*
$\overline{bK} : \overline{AK} - \overline{bK} = tg\tfrac{1}{2}\,(A\hat{b}K + b\hat{A}K) : tg\tfrac{1}{2}$
$\hat{b}K - b\hat{A}K)$

Da nun

$$A\hat{b}K + b\hat{A}K = \text{ſuppl.}\, A\hat{K}b = \text{ſuppl.}\,(A$$

$$= \text{ſuppl.}\,(a' + u)$$

ſo hat man

$$tg\tfrac{1}{2}\,(A\hat{b}K + b\hat{A}K) = \frac{1}{tg\tfrac{1}{2}\,(a' + u)}$$

Ferner

$$A\hat{b}K - b\hat{A}K = b\hat{a}K - b\hat{A}K = A\hat{K}a$$

alſo

$$tg\tfrac{1}{2}\,(A\hat{b}K - b\hat{A}K) = tg\tfrac{1}{2}\,t$$

und

$$a + r : a - r = \frac{1}{tg\tfrac{1}{2}\,(a' + u)} : tg\tfrac{1}{2}$$

oder

$$\frac{a-r}{a+r} = tg\tfrac{1}{2}\,t \, . \, \frac{tg\tfrac{1}{2}\,a' + tg\tfrac{1}{2}\,u}{1 - tg\tfrac{1}{2}\,a' \, . \, tg\tfrac{1}{2}\,u}$$

und daraus zieht man

$$tg\tfrac{1}{2}\,t = \frac{\frac{a-r}{a+r} - \frac{a-r}{a+r}\, . \, tg\tfrac{1}{2}\,a' \, . \, t}{tg\tfrac{1}{2}\,a' + tg\tfrac{1}{2}\,u}$$

Jede Seite des Vielecks muſs uns
Gleichung geben, wir haben alſo folge
gen, deren eben ſo viel ſind, als
Punkte

$$tg\tfrac{1}{2}\,t = \frac{\frac{a-r}{a+r} - \frac{a-r}{a+r}\, . \, tg\tfrac{1}{2}\,a' \, . \, t}{tg\tfrac{1}{2}\,a' + tg\tfrac{1}{2}\,u}$$

$$tg\tfrac{1}{2}\,u = \frac{\frac{b-r}{b+r} - \frac{b-r}{b+r}\, . \, tg\tfrac{1}{2}\,b' \, . \, t}{tg\tfrac{1}{2}\,b' + tg\tfrac{1}{2}\,x}$$

$$tg\tfrac{1}{2}x = \frac{\frac{c-r}{c+r} - \frac{c-r}{c+r} \cdot tg\tfrac{1}{2}c' \cdot tg\tfrac{1}{2}y}{tg\tfrac{1}{2}c' + tg\tfrac{1}{2}y}$$

$$tg\tfrac{1}{2}y = \frac{\frac{d-r}{d+r} - \frac{d-r}{d+r} \cdot tg\cdot\tfrac{1}{2}d' \cdot tg\tfrac{1}{2}z}{tg\tfrac{1}{2}d' + tg\tfrac{1}{2}z}$$

$$tg\tfrac{1}{2}z = \frac{\frac{e-r}{e+r} - \frac{e-r}{e+r} \cdot tg\tfrac{1}{2}e' \cdot tg\tfrac{1}{2}t}{tg\tfrac{1}{2}e' + tg\tfrac{1}{2}t}.$$

Aus dieſen Gleichungen beſtimmt man leicht jede iebige Unbekannte, z. B. x.

Aus der 3ten Gleichung erhält man x in Wer- n von y, man ſubſtituirt für y deſſen Werth in z der 4ten Gleichung gezogen u. ſ. w. bis man ter Werthe von u hat, die man durch die 2te Glei- ng in x ausdrückt.

Obgleich dieſe Rechnung etwas lang ſcheint, ſo d ſie durch die Symmetrie der Formeln erleich- , woraus man auch leicht ableitet, daſs die End- hung nie über den 2ten Grad ſteigen kann.

Wir wollen der Kürze wegen

$$tg\tfrac{1}{2}t = t'$$
$$tg\tfrac{1}{2}u = u$$
$$tg\tfrac{1}{2}x = x'$$
$$tg\tfrac{1}{2}y = y'$$
$$tg\tfrac{1}{2}z = z'$$

, ſo haben die gefundenen Gleichungen folgende :

$$t' = \frac{A + Bu'}{C + Du'}$$

$$u' = \frac{A' + B'x'}{C' + D'x}$$

$$x' = \frac{A'' + B''y'}{C'' + D''y'}$$

$$y' = \frac{A''' + B'''z'}{C''' + D'''z'}$$

$$z' = \frac{A'''' + B''''.t'}{C'''' + D''''.t'}$$

Subſtituirt man in die erſte Gleichung f
Werth aus der zweyten, ſo wird offen
Gleichung die Form

$$t' = \frac{A''''' + B'''''x'}{C''''' + D'''''x'}$$

haben, alſo hat ſie ihre Form nicht geän
geht es bis zur Endgleichung, die alſ
werden muſs.

Sechs und vierzigſte Aufga

331. **Wenn von den 4 Seiten
gonalen eines Vierecks, 5 gegebe
6te zu finden.**

Es ſey *ABDC* (Fig. 132.) das Vierec

$\overline{AB} = m$
$\overline{AC} = n$
$\overline{BD} = p$
$\overline{CD} = q$
$\overline{AD} = r$
$\overline{BC} = s$

'erner

$$B\hat{D}C = x$$
$$A\hat{D}C = y$$
$$A\hat{D}B = z$$

ir haben folglich $x = y + z$, alſo

$$\cos x = \cos y \cdot \cos z - \sin y \cdot \sin z$$

ler

$$\sin y \cdot \sin z = \cos y \cdot \cos z - \cos x$$

adrirt

$$y^2 \cdot \sin z^2 = \cos y^2 \cdot \cos z^2 + \cos x^2 - 2 \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z$$

:r

$$- \cos y^2)(1 - \cos z^2) = \cos y^2 \cdot \cos z^2 + \cos x^2 - 2 \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z$$

r

$$2 \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z = \cos x^2 + \cos y^2 + \cos z^2 \; \ldots\ldots \; (A)$$

erhält man aus den 3 Dreyecken *BDC*, *ADC*, *B*

$$\cos x = \frac{pp + qq - ss}{2pq}$$
$$\cos y = \frac{qq + rr - nn}{2qr}$$
$$\cos z = \frac{pp + rr - mm}{2pr}$$

tuirt man dieſe Werthe in die Gleichung (A) nultiplicirt mit $4pp\,qq\,rr$, ſo hat man

$$q\,rr + (pp + qq - ss)(qq + rr - nn)(pp + rr - mm)$$
$$(pp + qq - ss)^2 + pp(qq + rr - nn)^2 + qq$$
$$p + rr - mm)^2 \; \ldots \; (B)$$

Entwickelt man und ſetzt

$$mm, nn, pp, qq, rr, ss = \mu, \nu, \pi, \kappa,$$

ſo kommt

$$(\mu\kappa\kappa + \kappa\mu\mu + \nu\pi\pi + \pi\nu\nu + \varrho\sigma\sigma + \sigma\varrho\varrho) + (\mu\nu\sigma + \mu$$

$$-(\mu\nu\pi + \mu\nu\kappa + \mu\pi\kappa + \mu\kappa\varrho + \mu\kappa\sigma + \mu\varrho\sigma + \nu\pi\kappa +$$

$$+ \pi\varrho\sigma + \kappa\varrho\sigma) = 0$$

Dieſe Formel iſt, da μ, ν, π u. ſ. ſind, ohne Zeichen zu verändern, auf tive Syſteme anwendbar, d. h. auf die Vierecken, von denen wir (103.) ſprache 133, 134.).

Man erhält auch jede von den Gröſs w. wenn 5 gegeben ſind, durch eine Gleichung daraus, und darauf m, n, p da

$$\pm \sqrt{\mu} = m$$

$$\pm \sqrt{\nu} = n \text{ u. ſ. w.}$$

Dieſe Formel ſtimmt mit denen übe xell und Euler gefunden haben. Man kann den Lehrſatz (196.) dahin kommen, dieſe mir aber der kürzeſte.

332. Wir wollen die (328.) behand wieder vornehmen:

Wenn die 3 Winkel eines gegeben ſind, und die Ent ihrer 3 Scheitelpunkte von e Punkte in derſelben Ebene, ten dieſes Dreyecks zu finde

ABC ſey das geſuchte Dreyeck (Fi der gegebene Punkt, ſo wird *ABCD* ein

dem die 3 Seiten $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ bekannt ſind,
zu die Verhältniſſe unter einander der 3 übrigen
iten.

Es ſey

$$\overline{AB} = m$$
$$\overline{AC} = n$$
$$\overline{BC} = s$$
$$\overline{BD} = p$$
$$\overline{CD} = q$$
$$\overline{AD} = r$$

wird die vorige Formel auf dies Viereck anwend-
ſeyn. Man hat ferner

$$m = s \frac{\sin C}{\sin A}$$

$$n = s \frac{\sin B}{\sin A}$$

Subſtituirt man dieſe Werthe, ſo enthält die For-
nur eine Unbekannte, nehmlich s, die man leicht
immen kann.

333. Wenn die 4 Seiten eines Vierecks
eben ſind, und das Product ſeiner Dia-
alen, dieſe Diagonalen zu finden.

Es ſey $ABDC$ (Fig. 132.) das Viereck, die 4 ge-
nen Seiten

$$m = \overline{AB}$$
$$n = \overline{AC}$$
$$p = \overline{BD}$$
$$q = \overline{CD}$$

die beyden unbekannten Diagonalen und

$$rs = k$$

alſo

$$ss = \frac{kk}{rr} \text{ d. h. } \sigma = \frac{kk}{\varrho}$$

Subſtituirt man dieſen Werth von σ
mel, ſo erhält man eine quadratiſche Gle

334. 3 Kreiſe in derſelben E
gegeben, einen 4ten zu beſchreib
alle berühre.

A, *B*, *C* (Fig. 136.) ſeyen die Mitt
3 Kreiſe, *D* der des geſuchten, der Ha
3 gegebenen, *a*, *b*, *c*, der des geſuchte

$$\overline{AB} = m$$
$$\overline{AC} = n$$
$$\overline{BD} = p$$
$$\overline{CD} = q$$
$$\overline{AD} = r$$
$$\overline{BC} = s$$

m, *n*, *s* ſind nach der Vorausſetzung g
wenn man *x* gefunden hat, ſo ergeben ſi
durch die Gleichungen

$$p = b + x$$
$$q = c + x$$
$$r = a + x$$

Es bleibt alſo nur *x* zu finden, abe
ein Viereck, man kann alſo darauf die F
anwenden, d. h. man ſubſtituirt für *p*, *q*
fundenen Werthe in *x*, ſo bekommt ma
eine quadratiſche Gleichung.

Ich führe die Rechnung nicht aus, v
gabe von Geometern des erſten Ranges,

ton, Euler, Gunſs, ſchon behandelt iſt. Mein Zweck war nur zu zeigen, daſs die Formel ſehr vieler Anwendungen fähig iſt. Nachher werde ich ſie auf die Berechnung der Vielecke und Polyeder anwenden.

Sieben und vierzigſte Aufgabe.

335. Wenn man die 4 Seiten und 2 Diagonalen eines Vierecks kennt, die Segmente dieſer Diagonalen zu finden, und diejenigen Segmente, welche entſtehen, wenn man die Seiten bis zum Zuſammentreffen verlängert. (Fig. 137.)

Es iſt genug, wenn 5 von den 6 angeführten Stücken gegeben ſind, um die übrigen zu beſtimmen, aber da man durch die vorige Aufgabe aus den 5 das 6te finden kann, ſo wollen wir ſie hier alle 6 als gegeben betrachten.

H ſey der Durchſchnittspunkt der beyden Diagonalen, F der der verlängerten Seiten $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ und G der der verlängerten Seiten $\overline{AC}$, $\overline{BD}$. Man ſoll alſo beſtimmen

1) die 4 Segmente $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$, $\overline{DH}$ auf den Diagonalen.

2) die 8 Segmente $\overline{AF}$, $\overline{BF}$, $\overline{CF}$, $\overline{DF}$, $\overline{AG}$, $\overline{BG}$, $\overline{CG}$, $\overline{DG}$ auf den verlängerten Seiten.

Es feyen

$$\overline{BH} = x \qquad \overline{AB} = m$$
$$\overline{CH} = y \qquad \overline{AC} = n$$
$$\overline{AH} = u \qquad \overline{BD} = p$$
$$\overline{DH} = v \qquad \overline{CD} = q$$
$$\overline{AD} = r$$
$$\overline{BC} = s$$

Die Dreyecke ABC, BDC geben (196.)

$$uus = mmy + nnx - sxy$$
$$vvs = ppy + qqx - sxy$$

Subtrahirt man, und bemerkt, dafs

$$vv - uu = (v + u)(v - u) = r(v -$$

fo hat man

$$sr(v - u) = y(pp - mm) + x(qq - nn)$$

und eben fo

$$sr(y - x) = u(qq - pp) + v(nn - mm)$$

aber

$$v = r - u$$
$$y = s - x$$

alfo nach Reduction

$$s(mm + rr - pp) - 2sru = x(mm + qq - n$$
$$r(mm + ss - nn) - 2srx = u(mm + qq - n$$

Eliminirt man u, fo erhalten wir

$$x = \frac{s(mm + rr - pp).(mm + qq - nn - pp) \ldots (mm + ss - nn)}{(mm + qq - nn - pp)^2 - (2sr)^2}$$

Die 3 andern Segmente finden fich durch ä
Gleichungen. Man fieht alfo, dafs, wenn die
und Diagonalen eines Vierecks gegeben find,
der 4 Segmente auf den Diagonalen durch ein
chung vom erften Grade erhalten werden kann

Eben so kann man die 8 Segmente auf den verlängerten Seiten erhalten, mag man nun sie durch eine ähnliche Rechnung suchen, oder nach (101.) die Correlation der Figuren aufstellen.

Hat man die Segmente der Diagonalen, so kann man aus ihnen die der Seiten herleiten.

Das Dreyeck ABH giebt mir (218.)

$$\overline{AD} \cdot \overline{DH} \cdot \overline{BC} = \overline{BF} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CH}$$

also weil

$$\overline{BF} = \overline{AF} - \overline{AB}$$

hat man

$$\overline{AF} \cdot \overline{DH} \cdot \overline{BC} = \overline{AF} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CH} + \overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CH}$$

und folglich

$$AF = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CH}}{\overline{DH} \cdot \overline{BC} - \overline{DA} \cdot \overline{CH}}$$

eine allgemein anwendbare Formel, da die einzige Quantität darin, die invers werden kann, nur im Quadrate vorkommt.

Acht und vierzigste Aufgabe.

336. Wenn man die 4 Seiten und 2 Diagonalen eines Vierecks $ABCD$ kennt, die Transversale $\overline{PQ}$ zu finden, die durch Punkte, P, Q, willkührlich auf den gegenüberstehenden Seiten $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ angenommen gezogen wird. (Fig. 138.)

Ich ziehe die 4 Linien $\overline{AQ}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CP}$, $\overline{DP}$, dann haben wir (196.) im Dreyecke PDC

$$\overline{PQ}^2 \cdot \overline{DC} = \overline{PD}^2 \cdot \overline{CQ} + \overline{PC}^2 \cdot \overline{DQ} - \overline{DC} \cdot \overline{DQ} \cdot \overline{CQ}$$

Nun ſind, $\overline{DC}$, $\overline{DQ}$, $\overline{CQ}$ nach der Hypo
geben, man muſs alſo nur $\overline{PD}^2$, $\overline{PC}^2$ ſuchen.

Eben ſo giebt das Dreyeck ADB

$$\overline{PD}^2.\overline{AB} = \overline{BD}^2.\overline{AP} + \overline{AD}^2.\overline{BP}. - \overline{AB}.\overline{AP}$$

und das Dreyeck ACB

$$\overline{PC}^2.\overline{AB} = \overline{AC}^2.\overline{BP} + \overline{BC}^2.\overline{AP} - \overline{AB}.\overline{AP}.$$

alſo

$$\overline{PQ}^2 = \frac{1}{\overline{AB}.\overline{DC}}\{(\overline{AP}.\overline{CQ}.\overline{BD}^2 + \overline{BP}.\overline{CQ}.\overline{AD}^2 + \overline{BP}.$$
$$+ \overline{AP}.\overline{DQ}.\overline{BC}^2) -$$
$$-(\overline{AB}.\overline{AP}.\overline{BP}.\overline{CQ} + \overline{AB}.\overline{AP}.$$
$$+ \overline{AB}.\overline{DC}.\overline{CQ}.\overline{DQ})\}$$

Neun und vierzigſte Aufgabe.

337. Das vollſtändige Viereck mi
nen 3 Diagonalen in allen möglicher
len aufzulöſen.

Man wird ſich erinnern, daſs ich die Verei
von 4 in einer Ebene gezogenen graden Linie
vollſtändiges Viereck nenne, daſs dies vollſt
Viereck 3 einfache Vierecke von verſchiedener
umfaſst, wenn jedes 2 Diagonalen hat, die ſich
ſammt aber auf 3 Diagonalen reduciren laſſen.
ſteht alſo mein vollſtändiges Viereck aus 7 unbeſ
verlängerten graden Linien und umfaſst 51
(30 Linien, und 21 Winkel), von denen nur 5
ben zu ſeyn brauchen, um alle übrigen zu fi
Dies iſt alſo das Problem der Tetragonometrie, i
ner gröſsten Allgemeinheit.

Wir werden denſelben Gang beobachten wie
u. fgg.) bey der Trigonometrie, d. h. wir ne

willkührlich 5 davon als Maaſsſtab zur Vergleichung und bilden eine allgemeine Tafel, in der alle 51 Theile in Werthen dieſer 5 vorkommen.

Es ſey alſo (Fig. 84.) $AFDG$ das vollſtändige Viereck mit ſeinen 3 Diagonalen $\overline{AD}$, $\overline{FG}$, $\overline{BC}$.

Wir wollen zu den 5 Gegebenen der Segmente

$$\overline{AF},\ \overline{FB},\ \overline{BH},\ \overline{HC},\ \overline{CG}$$

uf den 3 Seiten des Dreyecks ABC annehmen, ſo at man gleich anfangs durch (3 Form. 228.) das 6te.

Aus dieſen 6 Segmenten findet man die 3 Transerſalen $\overline{AH}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$ durch (196.).

Dann kann man das Dreyeck ABH z. B. betrachen, das durch die Transverſale CF geſchnitten wird nd man hat (1ſte Formel 228.)

$$\overline{AF}.\overline{BC}.\overline{DH} = \overline{BF}.\overline{HC}.\overline{AD}$$

Eben ſo hat man offenbar

$$\overline{AH} = \overline{AD} + \overline{DH}$$

an kann alſo aus der Combination dieſer Gleichunn $\overline{AD}$ und $\overline{DH}$ finden, wie auch $\overline{BD}$, $\overline{DG}$, $\overline{CD}$, $\overline{D}$.

Dann erhält man $\overline{AK}$ und $\overline{DK}$, durch folgende eichungen:

$$\overline{AK}.\overline{DH} = \overline{DK}.\overline{AH} \ .\ .\ (4\ \text{Form. } 228.)$$

$$\overline{AD} = \overline{AK} + \overline{DK}$$

Durch den Satz (196.) findet man $\overline{FG}$, $\overline{FK}$, $\overline{GK}$.

Die 4te Formel (228.) giebt $\overline{LF}$,

$$\overline{LF}.\overline{GK} = \overline{LG}.\overline{FK}$$

er

$$\overline{LF}.\overline{GK} = (\overline{LF} + \overline{FG}).\overline{FK}$$

Eben ſo findet man $\overline{LG}$,

$\overline{LB}$, $\overline{LC}$ folgen aus den Gleichungen

$$\overline{LB}.\overline{CH} = \overline{LC}.\overline{BH}$$
$$\overline{LC} = \overline{LB} + \overline{BC}$$

So hat man schon alle Linien der Figur, die Wi kel lassen sich leicht finden. Die ganze Figur beste nämlich aus lauter Dreyecken, deren Seiten bekan sind.

Ist so die Tafel für die Ursigur entworfen, stellt man auch die allgemeine Tafel der Correlatic für alle Figuren auf, die nach denselben Formeln b handelt werden können.

Funfzigste Aufgabe.

338. **Das allgemeine Problem der Poly gonometrie zu lösen, d. h. jedes in eine Ebene beschriebene Vieleck mit allen Dia gonalen zu bestimmen, wenn eine hinrei chende Anzahl Gegebener vorhanden is Man nimmt übrigens die Seiten und Dia gonalen unbestimmt verlängert an.**

Man reducirt die Aufgabe auf die Bildung eine Tafel aller Quantitäten, die als Theile des vorgelegter Systems vorkommen, indem man diese Quantitäten wenn das Vieleck n Seiten hat, durch Werthe vo $2n - 3$ unter ihnen ausdrückt.

Dies angenommen sey *ABCDEF* (Fig. 139.) das gegebene Vieleck. Ich nehme als Mittel zur Verglei- chung eine Seite wie $\overline{AB}$, und ihre Entfernungen $\overline{CA}$, $\overline{CB}$, $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ u. s. w. von allen andern Winkeln

zu den ersten A, B, wodurch in der That die Zahl von $2n-3$ Gegebenen herauskommt.

Wenden wir nun auf die Vierecke $ABCD$, $ABDE$, $ABEF$, u. s. w. die $\overline{AB}$ zur Grundlinie, und jedes eine von den Seiten haben, die nicht unter denen begriffen sind, durch die wir die andern ausdrükken wollen, die Formeln der vorigen Aufgabe an, so findet man alle ihre Seiten, Diagonalen u. s. w. und erhält so die gesuchte allgemeine Tafel, wodurch man alle Aufgaben, die das Vieleck betreffen, auflösen kann.

Das Problem wird weit einfacher, wenn man das Vieleck ohne seine Diagonalen betrachtet, denn dann sind immer nur 3 Unbekannte zu finden, also auch nur 3 Gleichungen zu bilden. Diese 3 Gleichungen giebt uns die Eigenschaft an die Hand, dass in jedem Vielecke jede Seite gleich der Summe aller andern ist, wenn man sie respective mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, den sie mit der ersten bilden. Man braucht also nur, um die 3 Gleichungen zu haben, diesen Satz auf irgend 3 Seiten des Vielecks anzuwenden, wobey die Wahl dieser Seiten die Rechnung mehr oder weniger vereinfachen wird. Ich kann hier nicht aufs Einzelne gehen, überdiess sind schon die Vierecke in 2 schönen Dissertationen von Lexell in den Petersburger Memoiren, und die Vielecke überhaupt in L'huillier Polygonometrie behandelt. Beyde gingen von etwas andern Grundsätzen aus als ich; mir genügt es, an einem Beyspiele zu zeigen, wie man in jedem Fall, von dem meinigen ausgehend, die 3 Gleichungen bilden kann.

Es sey also $ABCDE$ (Fig. 139.) ein Fünfe… worin alles gegeben ist, nur nicht die Seiten … $\overline{BC}$, und der eingeschlossene Winkel $A\hat{B}C$.

Den Winkel $A\hat{B}C = B$ giebt die Gleichung, … $\pi = 90°$

$$A + B + C + D + E = 6\pi$$

also

$$B = 6\pi - (A + C + D + E)$$

Da B bekannt ist, so brauchen wir nur 2 Gl… chungen, um

$$AB = x$$
$$BC = y$$

zu finden. Wir haben also

$$x = \overline{AE}\,.\,cos\,\overline{AB}\,^\wedge\overline{AE}\,.\, + \overline{ED}\,.\,cos\,\overline{AB}\,^\wedge\overline{ED} + \ldots$$
$$cos\,\overline{AB}\,^\wedge\overline{DC} + y\,cos\,\overline{AB}\,^\wedge\overline{CB}$$

$$y = x\,.\,cos\,\overline{BC}\,^\wedge\overline{BA} + \overline{AE}\,.\,cos\,\overline{BC}\,^\wedge\overline{AE} + \overline{ED}\,.\,cos\,\overline{BC}\,^\wedge\overline{E}\ldots$$
$$+ \overline{DC}\,.\,cos\,\overline{BC}\,^\wedge\overline{DC}.$$

Nun ist aber

$$\overline{AB}\,^\wedge\overline{AE} = A$$

und wenn man $\overline{AB}$, $\overline{DE}$ verlängert, bis sie sich in … treffen, so hat man

$$\overline{AB}\,^\wedge\overline{ED} = A\hat{m}E = A + E - 2\pi$$

Eben so

$$\overline{AB}\,^\wedge\overline{DC} = 4\pi - (A + E + D)$$

und endlich

$$\overline{AB}\,^\wedge\overline{CB} = B$$

die erste Gleichung wird also

$$x = \overline{AE}\,.\,cos\,A - \overline{ED}\,.\,cos\,(A + E) + \overline{DC}\,cos\,(A + E + D)\ldots$$
$$+ y\,.\,cos\,B$$

Durch…

nen dieſer beyden Linien auf der erſten Axe, wenn man noch das Produkt der Projectionen auf der zweyten Axe dazu addirt.

Wir wollen die Winkel, welche $\overline{KA}$ reſp. mit den Axen $\overline{FF'}$, $\overline{GG'}$ bildet, α', α'' nennen, eben die Winkel von $\overline{KB}$, mit denſelben Axen β', β'', ſo hat man

$$\overline{a'k'} = \overline{AK} \,.\, cos\, a$$

oder

$$a' = A\, cos\, \alpha'$$
$$a'' = A\, cos\, \alpha''$$
$$b' = B\, cos\, \beta'$$
$$b'' = B\, cos\, \beta''$$

Subſtituirt man dieſe Werthe von a', a'', b', b'', in die vorher gefundene Gleichung (B), ſo haben wir, wenn wir alles mit $A \,.\, B$ dividiren,

$$cos\, k = cos\, \alpha' \,.\, cos\, \beta' + cos\, \alpha'' \,.\, cos\, \beta'' \;\ldots\; (C)$$

d. h.

Wenn zwey Linien einen beliebigen Winkel bilden, und man in der Ebene dieſes Winkels, willkührlich zwey auf einander ſenkrechte Axen zieht, ſo iſt der Coſinus des Winkels, den die beyden Linien einſchlieſsen, gleich dem Producte der Coſinus der Winkel, welche jede von ihnen mit der erſten Axe bildet, wenn man dazu noch das Product des Coſinus der Winkel addirt, den jede von ihnen mit der zweyten Axe bildet.

354. Diese Theorie umfaſst den Fall, wo man, statt den gegebenen Winkel auf 2 Axen in derselben Ebene zu beziehen, ihn auf 3 senkrecte Axen bezieht.

Wir brauchen nur den Punkt H, wo sich die beyden Axen $\overline{FF'}$ $\overline{GG'}$ schneiden, als die Projection einer 3ten auf die beyden ersten senkrechten Axe zu betrachten, und die Punkte A, B, K als die Projectionen der wahren Punkte, die sie vorstellen, so haben wir

$$\overline{AB}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{BK}^2 - 2\,\overline{AK}.\overline{BK} \cos k. \qquad \text{(A)}$$

wo diese Linien die wahren Werthe der Entfernungen zwischen den Punkten A, B, K, und nicht ihre Projectionen ausdrücken.

Wie man leicht übersieht, haben wir auch

$$\overline{AB}^2 = (a'-b')^2 + (b''-a'')^2 + (a'''-b''')^2$$
$$= a'a' + b'b' + a''a'' + b''b'' + a'''a''' + b'''b'''$$
$$- 2\,a'b' - a''b'' - 2\,a'''b'''$$

Eben so

$$\overline{KA}^2 = a''a'' + a'a' + a'''a'''$$
$$\overline{KB}^2 = a'a' + b''b'' + b'''b'''$$

Substituirt man diese Werthe in die 3 ersten Glieder der Gleichung (A) und reducirt, so kommt

$$A.B.\cos K = a'b' + a''b'' + a'''b''' \qquad \text{(B)}$$

d. h.

355. Wenn zwey Linien einen Winkel im Raume bilden und man ihn auf 3 senkrechte Axen projicirt, so ist das Product der beyden Linien in den Cosinus des eingeschlossenen Winkels gleich der Summe aus dem Produkte der Projection der bey-

den Seiten auf die erſte Axe, dem Producte der Projectionen der beyden Seiten auf die zweyte Axe, und dem Producte der Projectionen eben der Seiten auf die dritte Axe.

Wir wollen die Winkel, die $\overline{KA}$ reſpective mit den 3 Axen bildet,

$$\alpha', \alpha'', \alpha'''$$

nennen, und die 3 Winkel, welche $\overline{KB}$ mit eben den Axen bildet,

$$\beta', \beta'', \beta'''$$

Dann hat man

$$a' = A \cos \alpha'$$
$$a'' = A \cos \alpha''$$
$$a''' = A \cos \alpha'''$$
$$b' = B \cos \beta'$$
$$b'' = B \cos \beta''$$
$$b''' = B \cos \beta'''$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in (A) und reducirt, ſo kommt

$$\cos k = \cos\alpha' . \cos\beta' + \cos\alpha'' . \cos\beta'' + \cos\alpha''' . \cos\beta''' \quad (B)$$

d. h.

Wenn zwey Linien einen Winkel im Raume bilden, und man ſie auf 3 ſenkrechte Axen projicirt, ſo iſt der Coſinus des Winkels, den dieſe Linien bilden, gleich der Summe der Producte der Coſinus der Winkel, welche jede Axe mit den beyden Seiten des gegebenen Winkels bildet.

Wird $R = 0$, so hat man

$$cos\, k = 1$$
$$\alpha' = \beta'$$
$$\alpha'' = \beta''$$
$$\alpha''' = \beta'''$$

Die Gleichung wird also

$$cos\,\alpha'^2 + cos\,\alpha''^2 + cos\,\alpha'''^2 = 1$$

welches der Satz (351.) ist.

Zieht man in einer Kugel 3 unter einander senkrechte Halbmesser $= R$, und stellt sich einen 4ten nach beliebiger Richtung vor, den man wie zwey Halbmesser betrachtet, die mit einander einen Winkel $= 0$ bilden, und wendet die Formel (B) darauf an, so haben wir

$$A = R$$
$$B = R \text{ u. s. w.}$$
$$cos\, k = 1$$
$$a' = b'$$
$$a'' = b''$$
$$a''' = b'''$$

Die Gleichung wird also

$$a'a' + a''a'' + a'''a''' = 1$$

d. h.

Wenn man in einer Kugel 3 auf einander senkrechte Halbmesser zieht, und aus ihren Endpunkten, die in der Oberfläche der Kugel liegen, Perpendikel auf irgend einen 4ten Halbmesser senkt, so ist die Summe der Quadrate der Theile dieses Halbmessers, die von diesen Perpendikeln und dem Mittelpunkt begrenzt wer-

den, immer dieselbe, und gleich dem Quadrate des Halbmessers. Es wird also auch die Summe der Quadrate dieser Perpendikel das Doppelte des Quadrats des Halbmessers seyn.

Stellt man sich eine auf diesen 4ten Radius senkrechte Ebene vor, so werden die Winkel, die die 3 andern mit dieser Ebene bilden, die Complemente der Winkel seyn, die sie mit der 4ten Linie bilden, also ist

Die Summe der Quadrate der Projectionen 3er unter einander senkrechten Halbmesser einer Kugel, auf irgend einer Ebene das Doppelte des Quadrats des Halbmessers.

Sechs und funfzigste Aufgabe.

356. 3 Kreise, mögen es gröſste oder kleine seyn, sind auf der Oberfläche einer Kugel gezogen, einen 4ten Kreis zu finden, der die 3 andern berührt.

Es seyen A, B, C (Fig. 147.) die Mittelpunkte oder vielmehr die Pole der 3 gegebenen Kreise, D der des gesuchten. Wir wollen die 4 Punkte A, B, C, D durch Bogen von gröſsten Kreisen verbinden. Es ist klar, daſs die 3 Bogen $\overset{\frown}{DA}$, $\overset{\frown}{DB}$, $\overset{\frown}{DC}$, die von dem Punkte D ausgehen, durch die Berührungspunkte a, b, c, des gesuchten Kreises und der 3 gegebenen, durchgehen werden.

Nun wollen wir die Bogen $\overset{\frown}{Aa}$, $\overset{\frown}{Bb}$, $\overset{\frown}{Cc}$, refpect. a, b, c, nennen, und $\overset{\frown}{Da} = \overset{\frown}{Db} = \overset{\frown}{Dc} = x$

Es fey noch

$$\overset{\frown}{AB} = m$$
$$\overset{\frown}{AC} = n$$
$$\overset{\frown}{BD} = p$$
$$\overset{\frown}{CD} = q$$
$$\overset{\frown}{AD} = r$$
$$\overset{\frown}{BC} = s$$

Wir haben alfo (346.) folgende Formel:

$$1 - (cos\, m^2 + cos\, n^2 + cos\, p^2 + cos\, q^2 + cos\, r^2 + cos\, s^2) + \ldots.$$

Es ift aber offenbar

$$r = a + x$$
$$p = b + x$$
$$q = c + x$$

Subftituirt man diefe Werthe in der vorigen Gleichung, fo kommt eine, die nur x und bekannte Gröfsen enthält.

Sieben und funfzigfte Aufgabe.

357. Vier Kugeln find im Raume gegeben, eine 5te Kugel zu finden, die die 3 andern berühre.

Es feyen (Fig. 148.) A, B, C, D die Mittelpunkte der 4 gegebenen Kugeln, a, b, c, d ihre Halbmeffer, E der Mittelpunkt der gefuchten Kugel, R ihr Halbmeffer, m, n, p, q, r, s die 6 bekannten Linien $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$; m', n', p', q', r', s' die 6 unbekannten Winkel $A\hat{E}B$, $A\hat{E}C$, u. f. w.

die ihren Scheitel in E haben und auf den Linien m, n, p, q, r, s ſtehen, ſo haben wir

$$\cos m' = \frac{\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 - \overline{AB}^2}{2\,\overline{AE}\,.\,\overline{BE}}$$

Weil nun $\overline{AB} = m$ und

$$\overline{AE} = a + R$$
$$\overline{BE} = b + R$$

ſo haben wir

$$\cos m' = \frac{(a+R)^2 + (b+R)^2 - mm}{2(a+R)\,(b+R)}$$

und eben ſo

$$\cos n' = \frac{(a+R)^2 + (c+R)^2 - nn}{2(a+R)\,(c+R)}$$

$$\cos p' = \frac{(b+R)^2 + (d+R)^2 - pp}{2(b+R)\,(d+R)}$$

$$\cos q' = \frac{(c+R)^2 + (d+R)^2 - qq}{2(c+R)\,(d+R)}$$

$$\cos r' = \frac{(a+R)^2 + (d+R)^2 - rr}{2(a+R)\,(d+R)}$$

$$\cos s' = \frac{(b+R)^2 + (c+R)^2 - ss}{2(b+R)\,(c+R)}$$

Zwiſchen den 6 Winkeln m', n', p', q', r', s' hat man (346.) die Bedingungsgleichung

$1 + (\cos m'^2 + \cos n'^2 + \ldots) +$ u. ſ. w.

ſetzt man in dieſe Gleichung die eben gefundenen Werthe für $\cos m'$, $\cos n'$, $\cos p'$ u. ſ. w. ſo erhalten wir eine Gleichung, in der R die einzige Unbekannte iſt, und die, wie ich glaube, nur quadratiſch ſeyn wird; da aber die Rechnung ſehr langwie-

rig ist, obgleich ohne sonstige Schwierigkeit, so begnüge ich mich sie anzudeuten.

Acht und funfzigste Aufgabe.

358. Die allgemeine Aufgabe der sphärischen Tetragonometrie zu lösen, d. h. in allen Fällen ein Viereck, das aus gröfsten Kreisen einer Kugel besteht, zu lösen.

Die Aufgabe wird auf die Bildung einer allgemeinen Tafel der Theile des sphärischen Vierecks reducirt, alle nur in Werthen, so vieler anderer ausgedrückt, dafs dadurch der Rest bestimmt sey.

Da die Auflösung der (337.) für das gradlinigte Viereck vorgetragenen ganz ähnlich ist, so übergehen wir sie hier. Eben so kann man die Methode (338.) befolgen, um sphärische Vielecke (aus Bogen gröfster Kreise zusammengesetzt) aufzulösen.

Neun und funfzigste Aufgabe.

359. Wenn von den 10 Linien, die 5 Punkte im Raume zu zweyen verbunden, 9 gegeben sind, die 10te zu finden.

A, B, C, D, E (Fig. 149.) seyen die 5 Punkte im Raume, und die 10 Linien

$$\overline{AB} = m \qquad \overline{CD} = q$$
$$\overline{AC} = n \qquad \overline{AE} = u$$
$$\overline{AD} = r \qquad \overline{BE} = x$$
$$\overline{BC} = s \qquad \overline{CE} = y$$
$$\overline{BD} = p \qquad \overline{DE} = z$$

Um eine Gleichung zu finden, betrachte ich z. B. die 6 Winkel, die ihren gemeinſchaftlichen Scheitelpunkt in E haben, und die auf den 6 Linien, m, n, p, q, r, s ſtehen. Ich nenne ſie reſpective m', n', p', q', r', s'. So habe ich (346.) unter dem Coſinus dieſer Winkel die Gleichung

$$1 - (\cos m'^2 + \cos n'^2 + \cos p'^2 + \ldots) + \ldots$$

In dieſe Gleichung ſetze ich für jeden Coſinus ſeinen Werth zu m, n, p, u. ſ. w. wozu ich folgende Gleichungen habe:

$$\cos m' = \frac{xx + uu - mm}{2xu}$$

$$\cos n' = \frac{uu + yy - nn}{2uy}$$

$$\cos p' = \frac{xx + zz - pp}{2xz}$$

$$\cos q' = \frac{yy + zz - qq}{2yz}$$

$$\cos r' = \frac{uu + zz - rr}{2uz}$$

$$\cos s' = \frac{xx + yy - ss}{2xy}$$

Die Gleichung, die aus dieſer Subſtitution hervorgeht, enthält keine Wurzelgröſsen, und wird immer nach Art des quadratiſchen aufgelöſet werden können, da ſie ſymmetriſch iſt, und ſie z. B. für einen Fall, z. B. für x, ſo aufgelöſet werden kann. Man wird in dieſem Falle, wenn alles andere gegeben iſt, leicht die Punkte B, E mit dem Lineal und Zirkel finden können, alſo muſs auch die Gleichung

durch eine Folge quadratiſcher aufgelöſet werden können.

Sechszigſte Aufgabe.

360. Das Polyeder in allen Fällen aufzulöſen.

Iſt die Zahl der körperlichen Winkel $= n$, ſo muſs man, um den Reſt beſtimmen zu können, $3(n-2)$ unabhängige Stücke kennen. Dieſs iſt alſo die Zahl derjenigen Quantitäten, die man als Maaſsſtäbe zur Vergleichung brauchen muſs, und durch die in der zu bildenden Tafel die andern ausgedrückt werden.

Es ſeyen A, B, C, D, E, F, (Fig. 150.) die Scheitel des gegebenen Polyeders. Ich nehme die 3 Seiten des Dreyecks ABC, und die Entfernungen $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$ u. ſ. w. aller andern Winkel von A, B, C als Mittel, die übrigen auszudrücken, wo ich, wie gehörig, $3(n-2)$ Gegebene erhalte.

Betrachten wir nun dieſe Punkte zu Fünfen genommen, ſo haben wir die Syſteme

A, B, C, D, E
A, B, C, D, F
A, B, C, E, F

In jedem dieſer Syſteme iſt nach der Annahme nur eine einzige Unbekannte: im erſten die Linie $\overline{DE}$; im zweyten, $\overline{DF}$; im dritten $\overline{EF}$. Wir haben alſo nach der Aufgabe (331.) ſucceſſive jede dieſer unbekannten Linien.

Wir müſſen jetzt die Winkel aufſuchen, die zweyerley Art ſind, nehmlich durch dieſe Linien un-

ter einander, und durch die Ebenen gebildet, die diese Linien zu zweyen enthalten.

Da nun aber die Figur in Dreyecke aufgelöst ist, so finden sich die Winkel aus den Seiten sehr leicht, so z. B.

$$cos\, A\hat{E}C = \frac{\overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 - \overline{AC}^2}{2\,\overline{AE}\,.\,\overline{CE}}$$

Die Winkel der Ebenen giebt die sphärische Trigonometrie, so z. B. in der Pyramide $ABCE$ ist der Winkel am Scheitel E, durch die beyden Seitenflächen $\overline{\overline{EAB}}$, $\overline{\overline{EBC}}$ gebildet, durch folgende Gleichung gegeben

$$cos\, \overline{\overline{EAB}}\,\hat{}\,\overline{\overline{EBC}} = \frac{cos\, A\hat{E}C - cos\, A\hat{E}B\,.\,cos\, B\hat{E}C}{sin\, A\hat{E}B\,.\,sin\, B\hat{E}C}$$

361. Sind die Punkte A, B, C, D, E, u. s. w. in einer Ebene, so wird das Polyeder ein Polygon. Man kann also diese Aufgabe als die allgemeine Aufgabe der Geometrie der graden Linien und Ebenen betrachten.

362. Die in diesem Werke aus einander gesetzte Bildung der Tafeln, kann eben sowohl auf die analytische Geometrie, als auf die Trigonometrie angewandt werden. Z. B. um die Eigenschaften der Pyramide aufzusuchen, nenne man die Coordinaten der 4 Scheitelpunkte

x, y, z

x', y', z'

x'', y'', z''

x''', y''', z'''

und drücke alle Linien und Flächen in ihren Werthen aus. Die Pyramide wird hier durch 12 Stücke

bestimmt, da nur 6 nöthig sind. Aber man muss sich erinnern, dass unter den 12, 6 willkührliche sind, die dazu dienten, die Lage der 3 senkrechten Ebenen zu bestimmen. Gewöhnlich verschwinden diese willkührlichen Quantitäten als gemeinschaftliche Factoren bey der Rechnung, aber mitunter kann man auch die Rechnung sehr vereinfachen, wenn man ihnen für den behandelten Gegenstand passende Werthe beylegt.

Ich wiederhole noch einmal meine Überzeugung, dass die hier vorgetragene Theorie, gewiss mit dem grössten Nutzen, auf alle Theile der mathematischen und physiko - mathematischen Wissenschaften anzuwenden wäre.

Sechster Abſchnitt.

Beſtimmung eines Punktes im Raume, und Veränderung ſeiner Coordinaten.

363. Jede Curve kann man als die Bahn eines Punktes betrachten, der nach irgend einem Geſetze im Raume bewegt wird. Den Ausdruck dieſes Geſetzes, oder die Bedingungen dieſer Bewegung nennt man die Gleichung der Curve. Der Zweck der Gleichung iſt, die Curve auf andere bekannte und feſte Gegenſtände zu beziehen, die man als Mittel zur Vergleichung braucht. So muſs, nachdem man dieſe Gegenſtände wählt, die Gleichung andere Formen bekommen.

Da die einfachſten Gegenſtände, die wir kennen, und die wir behandeln können, Punkte, Grade, Linien, Ebenen ſind, ſo brauchen wir ſie gewöhnlich als Mittel zur Vergleichung, und beziehen auf ſie in jedem Augenblicke die Lage des beweglichen Punktes, der die Curve beſchreibt. Die Entfernungen dieſer feſten Gegenſtände und alle ihre Functionen hei-

ſsen Conſtanten, aber die Entfernungen des beweglichen Punktes von den feſten Gegenſtänden und die Functionen, worin dieſe entriren, heiſsen Veränderliche.

Eins der einfachſten Mittel, um eine in einer Ebene beſchriebene Curve auf feſte Gegenſtände zu beziehen, iſt, willkührlich in dieſer Ebene 2 gewöhnlich rechtwinklichte Axen zu ziehen, und die Relation aufzuſuchen, die vermöge der Geſetze, nach denen ſich der beſchreibende Punkt bewegt, beſtändig zwiſchen den Entfernungen dieſes Punktes von den beyden Axen beſtehen muſs. Doch braucht man auch zwey feſte Punkte, oder einen und eine feſte Linie, oder wiederum einen feſten Punkt, und den Winkel an dieſem Punkte mit einer feſten Linie u. ſ. w. Man ſieht leicht, wie viele Arten es giebt, die Natur der Curve durch eine Gleichung zwiſchen zwey Veränderlichen auszudrücken, die man überhaupt Coordinaten nennt. Um die Natur der Curve aus verſchiedenen Geſichtspunkten zu betrachten, beſchränkt man ſich nicht auf eine Art, ſondern nimmt nach und nach verſchiedene Mittel zur Vergleichung, und ſucht für jedes Syſtem die Gleichung der Curve, das nennt man nun das Syſtem der Coordinaten verändern.

364. Die Kunſt, die Eigenſchaften der Curven zu finden, iſt eigentlich die Kunſt das Syſtem der Coordinaten zu verändern, wenn man ſie in dem eben angeführten allgemeinen Sinne nimmt. Denn dadurch nimmt die Gleichung, die ihre Natur ausdrückt, ſo viele verſchiedene Formen an, als man Veränderun-

gen macht, und jede dieſer Formen iſt eine neue Art, dieſe Curve mit den feſten Gegenſtänden zu vergleichen, die man nach der Reihe als Mittel zur Vergleichung braucht.

Jede der Gleichungen, die man ſo erhält, zeigt durch ihre Form die Eigenſchaften der Curve, die Differentialrechnung nachher, unter welcher Geſtalt man ſie auch anwendet, die Tangenten, Normalen, Krümmungshalbmeſſer u. ſ. w. und alle dieſe neuen Gröſsen, die ſich ſtufenweiſe mit dem beſchreibenden Punkte verändern, ſind eben ſo viel Veränderliche, von denen man zwey als Coordinaten annehmen kann.

Nimmt man, ohne die Gleichung für die Curve zu kennen, zwey ſich entſprechende von dieſen Veränderlichen als Coordinaten bey irgend einer Lage des beſchreibenden Punktes an, ſo iſt es leicht, die andern dem Punkte entſprechenden Veränderlichen in Werthen von dieſen auszudrücken, und bildet man ſo eine Tafel, ſo iſt es leicht, wenn die Gleichung für die Curve gefunden iſt, beliebig das Syſtem der Coordinaten zu verändern.

365. Die Unvollkommenheit der Analyſe erlaubt nicht immer jede Veränderliche in den Werthen der gewählten Coordinaten auszudrücken. Man muſs ſich dann mit einer unaufgelöſten Gleichung, zwiſchen den beyden Coordinaten, die man als Mittel zur Vergleichung braucht, und der Veränderlichen, die man in die Tafel bringen wollte, oft ſogar mit einer Differentialgleichung zwiſchen dieſen 3 Veränderlichen behelfen.

366. Ist nun die allgemeine Tafel gebildet, so gehört sie ohne Unterschied allen Curven an, weil sie gebildet ward, ehe man die Gleichung derjenigen, die man untersuchen will, kannte. Um sie auf irgend eine Curve anzuwenden, muss man aus ihrer Gleichung irgend eine der Veränderlichen in Werthen der andern, und der Constanten ziehen. Dann giebt die Tafel alle Veränderliche zu Werthen einer einzigen ausgedrückt, und man kann sie leicht zu zweyen vergleichen.

367. Es sey (Fig. 152.) irgend eine Curve, M der bewegliche Punkt, der sie beschreibt, wir wollen willkührlich in der Ebene dieser Curve einen Punkt A als Ursprung der Coordinaten annehmen, eine Linie $\overline{AB}$ als Abscissenaxe ziehen, und von M auf $\overline{AB}$ das Perpendikel $\overline{MP}$ senken, so ist $\overline{AP}$ seine Abscisse, $\overline{MP}$ seine Ordinate, und wir haben zwey Veränderliche, deren Verhältniss, algebraisch angegeben, die Natur der Curve ausdrücken kann.

368. Jetzt wollen wir uns durch den Punkt M eine Tangente vorstellen. Diese Tangente, die demselben Punkte entsprechende Subtangente, Normale, der Krümmungshalbmesser, sind eben so viel Veränderliche, die zu zweyen, statt der Abscisse und Ordinate, als Coordinaten genommen werden könnten. Denn die Natur der Curve ist eben so gut durch die Gleichung zwischen der Normale und dem Krümmungshalbmesser bestimmt, als durch die zwischen Abscisse und Ordinate.

369. Ziehen wir durch den festen Punkt A den Radius Vector $\overline{AM}$, so sind dieser Radius Vector, und

der

der Winkel $M\hat{A}B$ neue Veränderliche, die man auch als Coordinaten brauchen könnte.

370. Nehmen wir noch willkührlich auf $\overline{AB}$, einen zweyten feſten Punkt B, und ziehen $\overline{BM}$, ſo ſind die Winkel, $M\hat{B}A$, $P\hat{M}B$, $A\hat{M}B$, die Linie $\overline{PB}$, die Räume $\overline{\overline{AMP}}$, $\overline{\overline{BMP}}$, $\overline{\overline{AMB}}$ eben ſo viel neue dem Punkte M entſprechende Veränderliche.

371. Legt man durch die Punkte A, B, M, einen Kreis, verlängert $\overline{MP}$ bis an den Umfang dieſes Kreiſes nach H, zieht die beyden Linien $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, und die Perpendikel $\overline{AG}$, $\overline{BF}$ auf $\overline{MB}$, $\overline{MA}$, die ſich in D, einem Punkte der Ordinate $\overline{MP}$, ſchneiden, zieht man von M den Durchmeſſer $\overline{MH'}$, und eine Linie $\overline{MH''}$, die den Winkel $A\hat{M}B$ in zwey gleiche Theile theilt, führt man dieſelben Conſtructionen bey den Winkeln A, B, H, u. ſ. w. aus, ſo ſind die daraus entſtandenen Winkel, Linien, Segmente, eben ſo viele Veränderliche, die dem Punkte M entſprechen, und aus denen man zu zweyen Gleichungen bilden kann, welche die Natur der Curve eben ſo wohl ausdrücken, als die Gleichung zwiſchen der Abſciſſe und der Ordinate.

372. Eine jede ſolche Gleichung (obgleich ſie implicite alle gleich ſind) kann ſich von den andern durch die Form ſo ſehr unterſcheiden, daſs man die Identität ſchwerlich erkennen würde. In dieſem Falle drückt ſie das aus, was man die verſchiedenen Eigenſchaften der Curve nennt.

Eine der erſten Aufgaben, die ſich hier darbieten, iſt die folgende ſehr bekannte, von der ich nur in ſo

weit handeln werde, um daraus einige neue Folgen ableiten zu können.

Ein und sechszigste Aufgabe.

373. Wenn eine Curve auf zwey feste Axen durch eine Gleichung zwischen Abscissen und Ordinaten, die diesen Axen parallel sind, bezogen ist, diess Coordinatensystem so zu verändern, dass die neue Gleichung zwischen Abscissen und Ordinaten statt finde, die zwey neuen gegebenen Axen parallel sind.

Es sey M (Fig. 153.) der beschreibende Punkt, A der Ursprung der neuen Coordinaten, $\overline{AP}$ die Abscisse, $\overline{MP}$ die Ordinate, a der Ursprung der neuen Coordinaten, $\overline{ap}$ die neue Abscisse, $\overline{Mp}$ die neue Ordinate.

Ich verlängere die beyden Abscissenaxen $\overline{AP}$, $\overline{ap}$, bis sie sich in Q schneiden, und die Ordinaten, $\overline{MP}$, $\overline{Mp}$, bis sie auch die Abscissenaxen in R, r schneiden.

Nun hängen $\overline{AP}$, $\overline{MP}$, $\overline{ap}$, $\overline{Mp}$ vom beschreibenden Punkte M ab, und sind folglich Veränderliche, hingegen die Richtungen der 4 Axen stehen in keinem Zusammenhange mit M, und sind also constant.

Folglich sind die 4 Winkel des Vierecks $MPQp$ alle constant, so wie die Winkel $M\hat{R}Q$, $M\hat{r}Q$. Ebendaher, weil die Lagen der Punkte A, a unabhängig von der Lage des Punktes M sind, so sind auch $\overline{AQ}$, $\overline{aQ}$ constant. Wir benennen also

$$\overline{AP} = X$$
$$\overline{MP} = Y$$
$$\overline{ap} = x$$
$$\overline{Mp} = y$$
$$\overline{AQ} = A$$
$$\overline{aQ} = a$$
$$M\hat{P}Q = P$$
$$M\hat{p}Q = p$$
$$M\hat{R}Q = R$$
$$M\hat{r}Q = r$$
$$P\hat{Q}p = q$$

Das Viereck *MPQp* giebt uns die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} A - X = Y \,.\, cos\, P + y\, cos\, r + (x - a)\, cos\, q \\ x - a = y \,.\, cos\, p + Y\, cos\, R + (A - X)\, cos\, q \end{array}\right\} \text{(A)}$$

Ziehen wir daraus die Werthe von X, Y, durch x, y und Conſtante ausgedrückt, ſo werden ſie von der Form

$$X = fx + gy + h$$
$$Y = f'x + g'y + h'$$

ſeyn, wo f, f', g, g', h, h' Conſtanten ſind, die man leicht durch obige Rechnung beſtimmen kann.

Da beyde Endgleichungen für X, Y, nur vom erſten Grade ſind, ſo iſt es augenſcheinlich, daſs die umgeformte Gleichung auf keinen höheren Grad als die gegebene ſteigen wird.

Sind von den conſtanten Winkeln P, p, R, r 3 gegeben, ſo folgt der 4te unmittelbar aus der Gleichung

$$P - R = p - r$$

Vermittelst dieser Bedingungsgleichung, kann man aus den Formeln (A) jeden beliebigen Winkel eliminiren.

374. Wenn die Gleichung zwischen den Coordinaten x, y vom mten Grade ist, so kann man sie offenbar unter diese Form bringen:

$$Fx^m + Gy^m + Z + K = 0$$

wo F, G, Constanten sind, Z das Aggregat aller Theile, in denen x, oder y in einer niedrigeren Potenz vorkommen, und K das constante Glied ist.

Für $x = 0$ verschwindet das erste Glied, so wie alle Glieder in Z, in denen x vorkommt. Die Gleichung enthält also keine andere Unbekannte mehr als y, und kann unter diese Form gebracht werden:

$$y^m + \frac{Z'}{G} + \frac{K}{G} = 0$$

der absolute Werth des Productes aller Ordinaten, die dem Punkte gehören, wo $x = 0$ ist, also

$$= \frac{K}{G}$$

Eben so zeigt man, daſs für $y = 0$ der absolute Werth des Productes der Abscissen

$$= \frac{K}{F}$$

sey. Bezeichnen wir also das Product der Abscissen mit (x), das der Ordinaten mit (y), so ist für den Anfangspunkt der Coordinaten

$$(y) : (x) = F : G$$

375. Wir wollen nun annehmen, daſs, ohne die Richtung der Axen zu verändern, man nur einen an-

dern Anfangspunkt in der Ebene wählt, in der die Curve gezogen ist, indem man nur in der Gleichung für x, $x' + s$, für y, $y' + t$ substituirt, wo s und t Constanten sind. Durch diese Substitution in der Gleichung

$$Fx^m + Gy^m + Z + K = 0$$

wird sie

$$Fx'^m + Gy'^m + Z' + K' = 0$$

an der sich nur Z, und K verändern konnten. Aus dieser Gleichung folgt eben so wie vorhin, dass

$$(y) : (x) = F : G$$

Diess Verhältniss wird also nicht dadurch geändert, wenn nur die Richtungen der Axen sich nicht verändern, d. h. immer ihrer ersten Lage parallel bleiben.

376. Wir wollen jetzt in der Ebene einer Curve eine beliebige Abscissenaxe $\overline{AA'}$ und verschiedene unter einander parallele Ordinaten ziehn, die die Abscissenaxe unter einem beliebigen Winkel schneiden. Natürliche dem Punkte P entsprechende Abscissen sollen die Segmente $\overline{aP}$, $\overline{a'P}$, $\overline{a''P}$ heissen, die auf dieser Axe von der Curve und der Ordinate begränzt werden. Hingegen die eigentlichen den Punkten P, p entsprechenden Abscissen sind $\overline{AP}$, $\overline{Ap}$, wo A, der Ursprung der Coordinaten, willkührlich angenommen ist. Diess angenommen, so kann man den bewiesenen Satz so ausdrücken:

In jeder geometrischen Curve verhalten sich die Producte der natürlichen Abscissen, wie die Producte der correspondirenden Ordinaten.

377. Da dieselben Schlüsse auf jede krumme Oberfläche angewandt werden können, so dürfen wir daraus schliessen:

Wenn man irgend eine geometrische krumme Oberfläche hat, und willkührlich im Raume zwey Punkte *A*, *B* annimmt, durch diese Punkte, zwey Paare unter sich paralleler graden Linien zieht, so sind die Producte der Segmente, die zwischen den Punkten *A* und *B*, durch die krumme Oberfläche auf den ersten beyden Linien abgeschnitten werden, in demselben Verhältnisse wie die Producte der eben so auf den andern beyden Linien bestimmten Segmente.

Denn wenn man durch die Punkte *A* und *B* eine neue grade Linie zieht, so verhalten sich die Producte der Segmente dieser Linie zwischen der krummen Oberfläche und den Punkten *A* und *B* sowohl, wie die ersten als die andern vorher erwähnten Producte.

378. Es sey (Fig. 155.) irgend eine geometrische Curve in einer Ebene beschrieben. Wir wollen in dieser Ebene willkührlich 3 Punkte *A*, *B*, *C*, annehmen, und sie zu zweyen, durch unbestimmt verlängerte Linien verbinden.

Nun sey

($A'B'$) das Product der Segmente auf $\overline{AB}$, zwischen dem Punkte *A* und den verschiedenen Armen der Curve;

$(B'A')$ das Product der Segmente auf derſelben Linie zwiſchen B, und den verſchiedenen Armen der Curve;

$(A'C')$ das Product der Segmente auf $\overline{AC}$ zwiſchen dem Punkte A und den Armen der Curve;

$(C'A')$ das Product der Segmente auf $\overline{AC}$ zwiſchen C und den Armen der Curve;

$(B'C')$ das Product der Segmente auf $\overline{BC}$ zwiſchen B und den Armen der Curve;

$(C'B')$ das Product der Segmente auf $\overline{BC}$ zwiſchen C und den Armen der Curve;

ſo hat man

$$(A'B')\,(B'C')\,(C'A') = (B'A')\,(C'B')\,(A'C')$$

Um es zu beweiſen, wollen wir durch den Winkel A zum Beyſpiel die Transverſale $\overline{AK}$ parallel mit $\overline{BC}$ ziehen, und das Product der Segmente auf $\overline{AK}$ zwiſchen A und den Armen der Curve $(A'K')$ nennen. Dann haben wir (375.)

$$(A'B') : (B'A') = (A'K') : (B'C')$$

$$(C'A') : (A'C') = (C'B') : (A'K')$$

woraus unmittelbar der Satz folgt.

Das Reſultat, zu dem wir ſchon (235.) kamen, hat das Merkwürdige, daſs es bey den Punkten und Linien, auf die man die Curve bezieht, nichts Feſtes vorausſetzt, und daſs alſo die Gleichung der Curve, ſo ausgedrückt, keine willkührliche Gröſse enthält, ſondern blos die Parameter, die die Geſtalt, aber nicht die abſolute Lage der Curve im Raume beſtimmen. Eben ſo iſt es mit dem folgenden Lehrſatze.

Acht und dreyſsigſter Lehrſatz.

379. Zieht man in der Ebene einer geometriſchen Curve ein beliebiges Vieleck $ABCDE$ (Fig. 156.), verlängert ſeine Seiten unbeſtimmt und behält die Bezeichnung im vorigen Paragraphen, ſo iſt

$$(A'B')\,(B'C')\,(C'D')\,(D'E')\,(E'A') = (B'A')\,(C'B')\,(D'C')\,(E'D')\,(A'E').$$

Zieht man die Diagonalen $\overline{AC}$. $\overline{AD}$, ſo hat man

$$(A'B')\,(B'C')\,(C'A') = (B'A')\,(C'B')\,(A'C')$$
$$(A'C')\,(C'D')\,(D'A') = (C'A')\,(D'C')\,(A'D')$$
$$(A'D')\,(D'E')\,(E'A') = (D'A')\,(E'D')\,(A'E')$$

Aus der Multiplication dieſer Gleichungen entſpringt die Formel des Lehrſatzes.

380. Eben die Betrachtungen finden für eine krumme geometriſche Oberfläche ſtatt, wie auch das eingeſchriebene Vieleck beſchaffen iſt. Wir haben alſo folgenden Satz.

Neun und dreyſsigſter Lehrſatz.

Wenn eine beliebige geometriſche krumme Oberfläche gegeben iſt, und man im Raume irgend ein Vieleck $ABCDE$ beſchreibt, die Seiten unbeſtimmt verlängert, und durch $(A'B')$ das Product der Segmente auf $\overline{AB}$ zwiſchen A und den verſchiedenen Gegenden der krummen Oberfläche bezeichnet u. ſ. w., ſo iſt

$(A'B')\,(B'C')\,(C'D')\,(D'E')\,(E'A') = (B'A')\,(C'B')\,(D'C')\,(E'D')\,(A'E')$

381. Werden alle oder einige Seiten des Vielecks Tangenten, ſo ſind die Segmente auf ſolchen Seiten, zu zweyen genommen, gleich. Es ſey z. B. $fghik$ (Fig. 157.) ein Kegelſchnitt, der in einem beliebigen Vieleck beſchrieben iſt, ſo daſs f, g, h, i, k, die Berührungspunkte ſind, ſo hat man

$$(A'B') = \overline{Af}^2$$
$$(B'A') = \overline{Bf}^2$$
$$(B'C') = \overline{Bg}^2$$
$$(C'B') = \overline{Cg}^2$$

u. ſ. w.

Die Gleichung verwandelt ſich alſo in

$$\overline{Af}\,.\,\overline{Bg}\,.\,\overline{Ch}\,.\,\overline{Di}\,.\,\overline{Ek} = \overline{Ak}\,.\,\overline{Ei}\,.\,\overline{Dh}\,.\,\overline{Cg}\,.\,\overline{Bf}.$$

382. Eben das hat offenbar für die Tangenten eines Körpers ſtatt, der durch Umdrehung eines Kegelſchnittes entſtand, mag das Vieleck, das aus ihrer Verbindung entſteht, in einer Ebene liegen oder nicht.

383. Iſt der Kegelſchnitt in einem Dreyecke beſchrieben (Fig. 158.) und zieht man aus jedem Winkel A, B, C dieſes Dreyecks, eine Linie nach dem gegenüberſtehenden Berührungspunkt, ſo hat man

$$\overline{Af}\,.\,\overline{Bh}\,.\,\overline{Cg} = \overline{Ag}\,.\,\overline{Bf}\,.\,\overline{Ch}$$

Alſo ſchneiden ſich dieſe 3 Transverſalen in einem Punkte D (224.), wie wir ſchon (237.) bewieſen haben. Man kann folglich auf die Kegelſchnitte die zahlreichen Eigenſchaften der vollſtändigen Vierecke anwenden.

Z. B. zieht man $\overline{fg}$ und nimmt an, daſs dieſe Linie, $\overline{Ah}$ im Punkte H ſchneide, ſo hat man (225.)

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{DH}} = \frac{\overline{Ah}}{\overline{Dh}}$$

verlängert man $\overline{gf}$, bis ſie $\overline{BC}$ in l trifft, ſo iſt

$$\frac{\overline{Bl}}{\overline{Cl}} = \frac{\overline{Bh}}{\overline{Ch}}$$

Zwey und ſechszigſte Aufgabe.

384. Die Gleichung einer Curve iſt zwiſchen der Abſciſſe $\overline{AP}$ oder $\overline{Mp}$ (Fig. 159.) und der Ordinate $\overline{MP}$ oder $\overline{Ap}$ gegeben, zweyen gegebenen Axen $\overline{AP}$, $\overline{Ap}$ parallel; das Syſtem der Coordinaten zu verändern, indem man als neue Coordinaten die beyden Segmente $\overline{MQ}$, $\overline{Mq}$ annimmt, die durch den beſchreibenden Punkt M, auf einer Transverſale $\overline{Qq}$ gebildet werden, die unter einem beſtändigen Winkel $A\hat{Q}q$, zwiſchen den gegebenen Axen $\overline{AP}$, $\overline{Ap}$ gezogen iſt.

Es ſey

$$\overline{AP} = x$$
$$\overline{MP} = y$$
$$\overline{MQ} = u$$
$$\overline{Mq} = v$$
$$P\hat{A}p = a$$
$$A\hat{Q}q = Q$$
$$A\hat{q}Q = q$$

Man ſoll die Natur der Curve durch eine Gleichung zwiſchen u, v ſtatt einer zwiſchen x, y ausdrücken.

Wir haben

$$y : u = \sin Q : \sin a$$

alſo

$$y \cdot \sin a = u \cdot \sin Q$$

eben ſo

$$v \cdot \sin q = x \cdot \sin a$$

und daher

$$x = \frac{v \cdot \sin q}{\sin a}$$

$$y = \frac{u \cdot \sin Q}{\sin a}$$

man braucht alſo nur dieſe Werthe von x, y in die Gleichung zu ſetzen.

Durch dieſe Umformung wird, wie man leicht ſieht, der Grad der Gleichung nicht geändert.

Man könnte auch als Coordinaten $\overline{QM}$, $\overline{Qq}$ annehmen. Wir wollen dieſe neue Coordinate $\overline{Qq} = z$ ſetzen, ſo iſt

$$z = u + v$$

oder

$$v = z - u$$

alſo

$$x = (z - u)\frac{\sin q}{\sin a}$$

$$y = u \cdot \frac{\sin Q}{\sin a}$$

Dieſe Art die Curven zu betrachten, indem man ſie auf 2 feſte Axen bezieht, und die Coordinaten,

auf derſelben ſich immer parallelen Transverſale nimmt, die zwiſchen dieſen beyden Axen liegt, kann in mehreren Fällen vortheilhaft ſeyn, weil man, ſtatt eines Vierecks, nur ein Dreyeck zu betrachten braucht, und mit Leichtigkeit die Trigonometrie auf die Curven anwenden kann. Ein Beyſpiel iſt die gewöhnliche Hyperbel auf ihre Aſymptoten bezogen.

Drey und ſechszigſte Aufgabe.

385. Eine Curve iſt auf 2 feſte Axen $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ (Fig. 160.) bezogen durch dieſen Axen parallele Coordinaten. Man nehme willkührlich auf dieſen Axen, 2 feſte Punkte B, C und ziehe von ihnen durch den beſchreibenden Punkt M, zwey grade Linien $\overline{BG}$, $\overline{CF}$ die die Axen $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ in G und F ſchneiden. Dieſs feſtgeſetzt ſoll das Syſtem der erſten Coordinaten verändert werden, ſo daſs wir $\overline{AF}$, $\overline{AG}$ als neue Coordinaten erhalten.

Wir wollen $\overline{Mp}$ parallel mit $\overline{AB}$ ziehen; $\overline{Mq}$ mit $\overline{AC}$: Ap oder $\overline{Mq}$ wird die Abſciſſe, und $\overline{Aq}$ oder $\overline{Mp}$ die Ordinate im erſten Coordinatenſyſtem ſeyn.

Es ſey alſo

$$\overline{Ap} = x$$
$$\overline{Mp} = y$$
$$\overline{AF} = u$$
$$\overline{AG} = v$$
$$\overline{AB} = b$$
$$\overline{AC} = c$$

ſo haben wir

$$x : b - y = v : b$$

alſo

$$bx = bv - vy$$

eben ſo

$$cy = cu - ux$$

alſo

$$x = \frac{bcv - cuv}{bc - uv}$$

$$y = \frac{bcu - buv}{bc - uv}$$

welche Werthe man nur für x, y in die Gleichung der Curve zu ſetzen braucht.

Nimmt man

$$\overline{BF} = t$$

$$\overline{CG} = z$$

als Coordinaten, ſo hat man

$$u = b - t$$

$$v = c - z$$

alſo

$$x = \frac{cct - ctz}{ct + bz - tz}$$

$$y = \frac{bbz - btz}{bz + ct - tz}$$

Vier und ſechszigſte Aufgabe.

386. Wenn eine Curve in einer Ebene beſchrieben iſt, ſo wollen wir willkührlich 3 feſte Punkte A, B, C in dieſer Ebene annehmen, und dieſe zu zweyen verbinden, um das Dreyeck ABC zu bilden (Fig.

160.), dann von dem beſchreibenden Punkte M zu jedem Winkel des Dreyecks eine Transverſale ziehen, bis ſie die gegenüberſtehende Seite ſchneidet. Iſt nun die Natur der Curve durch eine Gleichung, zwiſchen den Entfernungen $\overline{AF}$, $\overline{AG}$ des einen Winkels von den Punkten F, G ausgedrückt (welches die Durchſchnittspunkte der anliegenden Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, mit den Transverſalen $\overline{CF}$, $\overline{BG}$ ſind), ſo ſoll man dieſs Coordinatenſyſtem verändern, indem man als neue Coordinaten die Entfernungen $\overline{BF}$, $\overline{BH}$ eines der andern Winkel von den Punkten F, H, einführt.

Wir haben offenbar die 3 Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\overline{AF} &= \overline{AB} - \overline{BF}\\ \overline{CG} &= \overline{AC} - \overline{AG}\\ \overline{CH} &= \overline{BC} - \overline{BH}\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

dann auch (224.)

$$\overline{AF}.\overline{BH}.\overline{CG} = \overline{AG}.\overline{BF}.\overline{CH} \;\ldots\; (B)$$

alſo durch Subſtitution aus den erſten

$$(\overline{AB} - \overline{BF})\,(\overline{AC} - \overline{AG})\,.\,\overline{BH} = \overline{AG}\,.\,\overline{BF}\,(\overline{BC} - \overline{BH}) \;\ldots\; (C)$$

aus dieſer und der erſten von den Gleichungen (A) zieht man, wie es verlangt ward,

$$\overline{AF} = \overline{AB} - \overline{BF}$$

$$\overline{AG} = \frac{(\overline{AB} - \overline{BF}).\overline{BH}.\overline{AC}}{\overline{AB}\,.\,\overline{BH} - \overline{BC}.\overline{BF}}$$

Fünf und sechszigste Aufgabe.

387. Ein Dreyeck ABC (Fig. 161.) ist gegeben. Wir wollen uns eine Curve BMC vorstellen, so dass, wenn man ein Perpendikel $\overline{MP}$ auf die Seite BC des gegebenen Dreyecks fallen lässt, und diess Perpendikel verlängert, bis es die beyden andern Seiten in p und q schneidet, $\overline{MP}$ eine mittlere Proportionallinie zwischen $\overline{Mq}$ und $\overline{Mr}$ sey. Man verlangt die Gleichung dieser Curve, indem man sie auf $\overline{BC}$ als Abscissenaxe bezieht, und B als Ursprung der Coordinaten annimmt.

Die Coordinaten, zwischen denen die ursprüngliche Gleichung der Curve besteht, sind $\overline{MP}$ und $\overline{Mq} . \overline{Mr}$ oder allgemeiner $A . \overline{Mq} . \overline{Mr}$, wo A eine Constante ist und man das Product $\overline{Mq} . \overline{Mr}$ als eine einzige Veränderliche betrachtet. Man soll diess System verändern und dafür ein System setzen, in dem $\overline{BP}$, $\overline{MP}$ die Veränderlichen sind, von denen $\overline{MP}$ beyden Systemen gleich ist.

Ich bemerke, dass die Curve, wie sie auch beschaffen seyn mag, nothwendigerweise in den Punkten B, C, die Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ des Dreyecks zu Tangenten hat, denn in dem Punkte, wo die Curve $\overline{AB}$ trifft, wird

$$\overline{Mq} = 0$$

also

$$\overline{MP}^2 = 0$$

also liegt M in $\overline{BC}$, also ist es der Durchschnittspunkt von $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, also ist B dieser Durchschnittspunkt.

Ferner zieht man aus der Gleichung

$$\overline{MP}^2 = A \cdot \overline{Mq} \cdot \overline{Mr}$$

$$\frac{\overline{Mq}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{MP}}{A \cdot \overline{Mr}}$$

alſo iſt das letzte Verhältniſs von $\overline{Mq}$ zu $\overline{MP} = 0$, alſo geht die Curve nicht nur durch den Punkt B, ſondern ſie hat auch in eben dieſem Punkte B, $\overline{AB}$ als Tangente. Eben ſo beweiſet man, daſs die Curve durch C geht, und $\overline{AC}$ zur Tangente hat.

Es ſey nun

$$\overline{BP} = x$$
$$\overline{MP} = y$$
$$\overline{BC} = a$$
$$A\hat{B}C = b$$
$$A\hat{C}B = c$$

Ich habe alſo aus den Bedingungen der Aufgabe

$$yy = A \cdot \overline{Mq} \cdot \overline{Mr}$$

oder weil

$$\overline{Mq} = \overline{Pq} - y$$
$$\overline{Mr} = \overline{Pr} - y$$

ſo habe ich

$$yy = A\,(\overline{Pq} - y)\,(\overline{Pr} - y)$$

oder

$$(1 - A)\,yy + A(\overline{Pq} + \overline{Pr})\,y - A \cdot \overline{Pq} \cdot \overline{Pr} = 0 \;\ldots\; \text{(A)}$$

Man ſoll noch $\overline{Pq}$, Pr finden.

Das Dreyeck qBp giebt

$$\overline{Pq} = x \cdot \tang b$$
$$Pr = (a - x) \cdot \tang c$$

Subſtituirt man in (A), ſo hat man

$$(1 - A)\,yy + A\,\{x \tang b + (a - x) \tang c\}\,y$$
$$- A \cdot x \cdot \tang b \cdot (a - x) \tang c = 0$$

eine

ein Gleichung für Kegelſchnitte, man kann alſo daraus verſchiedene Eigenſchaften dieſer Curven ziehn.

Unmittelbar folgt, daſs in jedem Kugelſchnitte, wenn man an zweyen ſeiner Punkte B, C die Tangenten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ zieht, und dieſe Punkte B, C durch eine Linie $\overline{BC}$ verbindet, jede Transverſale, die ſenkrecht auf $\overline{BC}$ ſteht, von der Beſchaffenheit ſeyn wird, daſs $\overline{MP}^2$ in gegebenem Verhältniſſe mit $\overline{BD} \cdot \overline{CD}$ ſtehe. Denn wir haben eben geſehen, daſs man immer einen Kegelſchnitt ziehen kann, der dieſer Bedingung Gnüge leiſte. Aber man kann nur einen einzigen Kegelſchnitt beſchreiben, der beyde Linien $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ in den Punkten B, C berührt, und der zugleich durch den beſchreibenden Punkt M geht.

388. Wenn die Transverſale $\overline{rpP}$ ſtatt, auf $\overline{BC}$ ſenkrecht zu ſtehen, mit ihr einen andern Winkel machte, ſo würde jedes der neuen Segmente auf dieſer Transverſale, in gegebenem Verhältniſſe mit dem ſtehen, das ſtatt fand, als die Transverſale ſenkrecht war, alſo überhaupt gilt

Ein und vierzigſter Lehrſatz.

Wenn man willkührlich in jedem Kegelſchnitte nach gegebener Richtung eine Transverſale zieht, ſo iſt das Quadrat des Theils dieſer Transverſale, zwiſchen der Curve und einer feſten Sehne in gegebenem Verhältniſs zu dem Producte der beyden Theile dieſer Transverſale, zwiſchen demſelben Punkte der Curve, und den

beyden, Tangenten an den Enden der Sehne.

389. Man ziehe durch die Punkte B, C zwey neue Sehnen nach einem andern Punkte D, so findet dieselbe Eigenschaft für eine jede von ihnen statt. Nennt man also

Y, Y', Y'', die Segmente derselben Transversale zwischen der Curve und den Sehnen $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$;

Z, Z', Z'', die Segmente der Transversale zwischen der Curve und den Tangenten $\overline{BA}$, $\overline{CA}$, $\overline{DG}$, so hat man

$$YY = KZZ'$$
$$Y'Y' = K'ZZ''$$
$$Y''Y'' = K''Z'Z''$$

wo K, K', K'' 3 Constanten sind; multiplicirt man diese Gleichungen, und zieht die Quadratwurzel aus, so hat man

$$YY'Y'' = ZZ'Z'' \sqrt{(KK'K'')}$$

390. Nimmt man auf der Curve einen neuen Punkt E, und verbindet die 4 Punkte, B, C, D, E zu zweyen durch grade Linien, zieht man noch an jedem dieser Punkte eine Tangente, so entsteht ein eingeschriebenes und ein umschriebenes Viereck. Nennt man nun

Y, Y', Y'', Y''' die Segmente auf der Transversale zwischen dem beschreibenden Punkt M, und den Seiten $\overline{BC}$, $\overline{DE}$, $\overline{BD}$, $\overline{CE}$

Z, Z', Z'', Z''' die Segmente auf der Transversale zwischen dem beschreiben-

den Punkte M und den Tangenten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{GI}$, $\overline{GH}$,

so hat man, da diese neuen Sehnen und Tangenten dieselben Eigenschaften, als die haben, die das Dreyeck ABC ausmachten,

$$YY = KZZ'$$
$$Y'Y' = K'Z''Z'''$$
$$Y''Y'' = K''ZZ''$$
$$Y'''Y''' = K'''Z'Z'''$$

also

$$YY'Y''Y''' = ZZ'Z''Z''' \Upsilon (KK'K''K''')$$

Man sieht leicht, dass dieselben Betrachtungen auf jede anderen Vielecke angewandt werden können, dass also allgemein

Zwey und vierzigster Lehrsatz.

391. Wenn man in einem Kegelschnitt ein Vieleck beschreibt, und ein anderes umschreibt, das seine Berührungspunkte zu den Winkelpunkten des eingeschriebenen hat, dann eine beliebige Transversale, nach gegebener Richtung (d. h. einer festen Axe parallel zieht, so ist das Product aller Segmente dieser Transversale zwischen dem beschreibenden Punkt, und jeder Seite des eingeschriebenen Vielecks, in gegebenem Verhältnisse zu dem Producte aller Segmente derselben Transversale, zwischen dem beschreibenden Punkt und jeder Seite des umschriebenen Vielecks.

392. Es ſey $ABCDEF$ (Fig. 162.) ein beliebiges Vieleck von grader Seitenzahl, in einem Kegelſchnitt beſchrieben; ziehen wir eine Transverſale $\overline{MN}$ einer feſten Axe parallel, die die Curve und alle Seiten des Vielecks ſchneidet, ſo iſt, wenn wir von irgend einer Seite an zählen, das Product aller Segmente auf dieſer Transverſale zwiſchen M und den graden Seiten, zu dem Producte der Segmente zwiſchen M und den ungraden Seiten in gegebenem Verhältniſſe d. h. in einem Verhältniſſe, das unverändert bleibt, wo auch der Punkt M iſt, ſo lange nur die Transverſale der feſten Axe parallel bleibt.

Wir wollen annehmen, das Vieleck ſey ein Sechseck; ich ziehe die Diagonale $\overline{AD}$, ſo daſs $ABCD$, $AFED$ zwey Vierecke ſind, und bezeichne das Segment zwiſchen M, und $\overline{AB}$ mit $(MA'B')$ u. ſ. w. ſo iſt

$$(MA'B')\,(MC'D') = K\,(MB'C')\,(MA'D')$$
$$(MA'F')\,(MD'E') = K'\,(ME'F')\,(MA'D')$$

alſo

$$K'\,(MA'B')\,(MC'D')\,(ME'F') = K\,(MB'C')\,(MA'F')\,(MD'E')$$

was zu beweiſen war.

Iſt der Satz für ein Sechseck bewieſen, ſo wird er eben ſo für ein Achteck bewieſen, indem man es in ein Sechseck und in ein Viereck zerlegt, es iſt alſo allgemein.

Drey und vierzigſter Lehrſatz.

393. Wenn man zu einem Kegelſchnitt ein grades Vieleck beſchreibt, das eine grade Seitenzahl hat, und eine Transverſale parallel mit einer feſten Axe zieht, die dieſe Curve und die Seiten des Vielecks ſchneidet, ſo iſt das Product aller Segmente zwiſchen einem Punkte, wo die Curve von der Transverſale geſchnitten wird, und allen graden Seiten in gegebenem Verhältniſs zu dem Producte aller Segmente zwiſchen demſelben Punkte der Curve und den ungraden Seiten.

394. Iſt die Seitenzahl des Vielecks ungerade, ſo kann man den vorigen Satz anwenden, wenn man einen Winkelpunkt des Vielecks als eine unendlich kleine Seite anſieht. Dieſe unendlich kleine Seite wäre das Element des Umfangs, und folglich wäre ſeine Richtung die der Tangente.

395. Es verdient bemerkt zu werden, daſs alle dieſe Sätze auf Vielecke im allgemeinſten Sinne anwendbar ſind, z. B. auf das Viereck, wie wir es (99.) nahmen.

396. Der vorige Satz iſt an Folgen fruchtbar.

Man nehme z. B. willkührlich 6 Punkte A, B, C, D, E, F auf dem Umfange eines Kegelſchnitts an (Fig. 163.). Verbindet man dieſe Punkte durch Linien, um das Sechseck $ABCDEF$ zu bilden, und verlängert die Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AF}$, die am Winkel A liegen, und die Seiten DC, DE, die am gegenüberſtehenden

Winkel D liegen, bis ſie die erſten in M und N treffen, zieht dann die beyden Diagonalen $\overline{BE}$, $\overline{FC}$, ſo behaupte ich, daſs dieſe beyden Diagonalen, und die Linie $\overline{MN}$ ſich in einem Punkte R ſchneiden.

Es ſeyen p, q die Durchſchnittspunkte von $\overline{MN}$ und der Curve. Man ziehe mit $\overline{MN}$ ein beliebige Parallele $\overline{mn}$, welche die Curve in f, g, die beyden Linien $\overline{AM}$, $\overline{AN}$ in m, n, die beyden Linien $\overline{DM}$, $\overline{DN}$ in s, t, und die beyden Diagonalen $\overline{BE}$, $\overline{FC}$ in r, r' ſchneide, nach der vorigen Bemerkung (394.) bildet $ABEDCFA$ ein neues Sechseck, und man hat (392.)

$$\overline{fm} \,.\, \overline{ft} \,.\, \overline{fr'} = K \,.\, \overline{fr} \,.\, \overline{fs} \,.\, \overline{fn}$$

wo K eine Conſtante iſt.

Jetzt ſoll $\overline{mn}$ ſich mit ſich ſelbſt parallel bewegen, und in $\overline{MN}$ fallen, ſo werden die Punkte s und m in M, die Punkte t und n in N fallen und die Gleichung wird

$$\overline{pR'} = K \,.\, \overline{pR}$$

wenn wir annehmen, daſs r, r' in R, R' übergehen.

Eben ſo giebt der andere Durchſchnitt q von $\overline{MN}$ mit dem Umkreiſe

$$\overline{qR'} = K \,.\, \overline{qR}$$

woraus mit der vorigen verbunden

$$\overline{pR'} \,.\, \overline{qR} = \overline{pR} \,.\, \overline{qR'}$$

Nehmen wir nun $\overline{RR'} = x$ an, ſo haben wir

$$\overline{pR'} = \overline{pR} + x$$
$$\overline{qR'} = \overline{qR} - x$$

alſo

$$\overline{pR} \,.\, \overline{qR} + \overline{qR} \,.\, x = \overline{pR} \,.\, \overline{qR} - \overline{pR}\, x$$

oder

$$x(\overline{pR} + \overline{qR}) = 0$$

oder

$$x = 0$$

d. h. $rr' = 0$ oder die Punkte R, R', fallen in einander, die 3 Linien $\overline{MN}$, $\overline{BE}$, $\overline{FC}$ kreuzen ſich alſo in einem Punkte.

397. Stellen wir uns nun vor, daſs die Punkte A, B, C, D, E, F, ſich willkührlich auf dem Umfange der Curve bewegen, ſo daſs die anfängliche Ordnung geſtört werde, ſo wird doch die Eigenſchaft noch in jedem correlativen Syſteme beſtehen, d. h. überhaupt gilt

Vier und vierzigſter Lehrſatz.

Wenn man auf dem Umfang eines Kegelſchnittes willkührlich 6 Punkte A, B, C, D, E, F annimmt und die Linien $\overline{AB}$, $\overline{AF}$ verlängert, bis ſie die Linien $\overline{DC}$, $\overline{DE}$ in M, und N treffen, ſo ſchneiden ſich $\overline{MN}$, $\overline{BE}$, $\overline{FC}$ in einem Punkte.

398. Die 6 Punkte ſollen die Lage (Fig. 164.) annehmen, ſo werden $\overline{BE}$, $\overline{CF}$, die Diagonalen waren, zu Seiten, und die Punkte M, N, R bleiben immer in einer graden Linie, alſo

Fünf und vierzigſter Lehrſatz.

In jedem Sechseck, das einem Kegelſchnitt eingeſchrieben iſt, liegen die 3

Punkte, wo ſich die gegenüberſtehenden Seiten ſchneiden, in einer graden Linie.

399. Werden die 3 Seiten $\overline{AF}$, $\overline{DC}$, $\overline{BE}$ jede $= 0$, ſo bilden ſie verlängert Tangenten, und die 3 andern ein Dreyeck, alſo

Sechs und vierzigſter Lehrſatz.

Wenn man ein Dreyeck in einen Kegelſchnitt beſchreibt, und ein anderes umſchreibt, deſſen Berührungspunkte die Winkelpunkte des erſten ſind, ſo ſind die 3 Durchſchnittspunkte der Seiten des eingeſchriebenen Dreyecks mit den reſpectiven Seiten des Umſchriebenen immer in einer graden Linie.

Dieſe Bemerkung iſt ſchon vorher beſonders für den Kreis gemacht.

400. Im Sechsecke (Fig. 165.) ſollen nur zwey Seiten $\overline{CF}$, $\overline{BE}$, $= 0$ werden, ſo wird aus der Figur ein eingeſchriebenes Viereck, und BE, CF verlängert werden in B, C, Tangenten. Iſt alſo

$$R = \overline{BE} \cdot \overline{CF}$$
$$M = \overline{AB} \cdot \overline{CD}$$
$$N = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

ſo liegen M, N, R in einer graden Linie.

Eben ſo wenn R' der Durchſchnittspunkt der Tangenten durch die Endpunkte der andern Diagonale AD iſt, ſo muſs R' mit M, N in einer graden

Linie liegen, alſo liegen M, N, R, R' alle in einer graden Linie, oder überhaupt

Sieben und vierzigſter Lehrſatz.

Wenn man in einem Kegelſchnitt ein Viereck beſchreibt, und ein anderes ſo umſchreibt, daſs die Berührungspunkte des letzten in die Winkelpunkte des erſten fallen, ſo liegen die beyden Durchſchnittspunkte der gegenüberſtehenden Seiten des eingeſchriebenen Vierecks, die beyden Durchſchnittspunkte der Seiten des umſchriebenen Vierecks, alle 4 auf derſelben graden Linie.

401. Wir wollen die beyden Diagonalen $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ des eingeſchriebenen, und die beyden Diagonalen $\overline{ad}$, $\overline{bc}$ des umſchriebenen Vierecks ziehen, ſo werden ſich alle dieſe Diagonalen in einem Punkte K ſchneiden.

Man braucht nur ſtatt des Vierecks $ABDC$ das Viereck $ABCD$ zu betrachten, welches dieſelben Winkelpunkte wie das erſte hat, aber welches von den beyden ſich am Scheitel entgegengeſetzten Dreyecken ABK, CDK gebildet iſt, ſo beweiſt der vorige Satz, daſs b, c, K, M, ſo wie a, d, K, N auf einer graden Linie liegen müſſen, alſo

Acht und vierzigſter Lehrſatz.

Wenn man in einem Kegelſchnitt ein Viereck beſchreibt, und ein anderes umſchreibt, deſſen Berührungspunkte die

Winkelpunkte des erſten ſind, ſo ſchneiden ſich die 4 Diagonalen dieſer Vierecke alle in einem Punkte.

402. Wenn man alſo um einen Kegelſchnitt ein Viereck *abdc* beſchreibt, ſo ſchneiden ſich die beyden Diagonalen dieſes Vierecks und die beyden Linien, welche durch die Berührungspunkte der gegenüberſtehenden Seiten gezogen werden, in einem Punkte.

403. Man kann dieſe Theorie leicht auf Vielecke von beliebiger Seitenzahl ausdehnen. Es ſey z. B. (Fig. 166.) ein Achteck $ABCDEFGH$; durch die beyden Diagonalen $\overline{BD}$, $\overline{FH}$ ziehe ich das Sechseck $ABDEFH$ daraus, und eben ſo, wenn ich die Diagonalen $\overline{BH}$, $\overline{DF}$ ziehe, das Sechseck $BCDFGH$ alſo nach dem, was oben (396.) geſagt iſt, wenn man $\overline{BF}$, $\overline{DH}$ zieht und alle Seiten, bis wo ſie zuſammentreffen, in M, N, P, Q verlängert, ſo ſchneiden ſich

1) die 3 Linien $\overline{BF}$, $\overline{DH}$, $\overline{MN}$ in einem Punkt,

2) die 3 Linien $\overline{BF}$, $\overline{DH}$, $\overline{PQ}$ in demſelben Punkte,

alſo alle 4 in einem Punkte, und da daſſelbe immer ſtatt finden muſs, wie auch die Punkte auf dem Umfang liegen, ſo folgt

Neun und vierzigſter Lehrſatz.

Wenn 8 Punkte A, B, C, D, E, F, G, H, auf dem Umfange eines Kegelſchnitts liegen, ſo iſt

$$\overline{BF}\cdot\overline{DH} \ddagger \overline{\overline{AB}\cdot\overline{DE}}\;\overline{\overline{AH}\cdot\overline{EF}}\cdot\overline{\overline{CD}\cdot\overline{FG}}\;\overline{\overline{BC}\cdot\overline{GH}}$$

404. Es versteht sich von selbst, dass alle diese Sätze für Kegelschnitte, auch für den Kreis gelten.

405. Dieselbe Theorie ist auch, wie auf einen besondern Fall, auf die Vereinigung zweyer graden Linien, die man als Asymptoten einer Hyperbel oder als eine unendlich verlängerte Hyperbel betrachtet, anwendbar. Z. B. hat man zwey Linien $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ (Fig. 167.) gezogen, die sich in R schneiden, und nimmt nach Belieben eine gewisse Anzahl Punkte A, A', A'' auf der einen und eben so viel correspondirende Punkte B, B', B'' auf der andern, zieht dann die Linien $\overline{AB'}$, $\overline{BA'}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'A''}$, $\overline{A''B''}$, $\overline{B''A}$, so bildet die Vereinigung dieser Linien ein Vieleck $ABA'B'A''B''$, das der Figur, die aus den Linien $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ besteht und die wie eine Hyperbel betrachtet wird, eingeschrieben ist. Zieht man also eine Transversale $\overline{ab}$, welche die erste dieser Linien in a, die zweyte in b, und die verlängerten Seiten des Vielecks in c, c', c'', c''', c'''', c''''' schneidet, so hat man

$$\frac{\overline{ac} \cdot \overline{ac''} \cdot \overline{ac''''}}{\overline{ac'} \cdot \overline{ac'''} \cdot \overline{ac'''''}} = \frac{\overline{bc} \cdot \overline{bc''} \cdot \overline{bc''''}}{\overline{bc'} \cdot \overline{bc'''} \cdot \overline{bc'''''}}$$

Eben so bey den andern für jede Lage der Transversale und jede Seitenzahl des Vielecks.

Eben so kann man aus (396.) schliessen, dass

$$\overline{AB} \cdot \overline{B'A''}$$
$$\overline{BA'} \cdot \overline{A''B''}$$
$$\overline{A'B'} \cdot \overline{B''A}$$

in einer graden Linie liegen müssen.

406. Hat man alſo ein Viereck $ABCD$ mit zwey Diagonalen $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ und zieht eine beliebige Transverſale $\overline{mp}$, die $\overline{AB}$ in m, $\overline{AC}$ in p, $\overline{BD}$ in q, $\overline{CD}$ in n, $\overline{BC}$ in L, $\overline{AD}$ in K ſchneidet, ſo hat man

$$\frac{\overline{Km} \cdot \overline{Kn}}{\overline{Lm} \cdot \overline{Ln}} = \frac{\overline{Kp} \cdot \overline{Kq}}{\overline{Lp} \cdot \overline{Lq}}$$

d. h.

Funfzigſter Lehrſatz.

Wird ein Viereck mit 2 ſeiner Diagonalen, durch eine beliebige Transverſale geſchnitten, ſo verhalten die Producte der Segmente auf dieſer Transverſale zwiſchen einer Diagonale, und den gegenüberſtehenden Seiten zu zweyen genommen, ſich wie die Producte der Segmente auf eben dieſer Transverſale, zwiſchen der andern Diagonale, und denſelben gegenüberſtehenden Seiten.

Dieſer Satz iſt eine Generaliſation von (225.), wo die Transverſale in die dritte Diagonale $\overline{FG}$ des Vierecks fällt.

407. Man kann eben ſo aus (405.) folgenden merkwürdigen Lehrſatz ſchlieſsen:

Ein und funfzigſter Lehrſatz.

Wenn 5 unbeſtimmte grade Linien, die wir a, b, c, d, e nennen wollen, in derſelben Ebene gezogen ſind, ſo ſchneiden ſich folgende 6 Linien in einem Punkte.

1) a

2) $\overline{\overline{b}\cdot\overline{c}}\;\overline{\overline{d}\cdot\overline{e}}$

3) $\overline{\overline{e}\cdot\overline{a}\cdot\overline{b}\;\overline{c}\cdot\overline{d}}\;\overline{\overline{c}\cdot\overline{b}\cdot\overline{e}\;\overline{a}\cdot\overline{d}}$

4) $\overline{\overline{e}\cdot\overline{b}\cdot\overline{d}\;\overline{c}\cdot\overline{a}}\;\overline{\overline{b}\cdot\overline{e}\cdot\overline{c}\;\overline{d}\cdot\overline{a}}$

5) $\overline{\overline{d}\cdot\overline{a}\cdot\overline{b}\;\overline{c}\cdot\overline{e}}\;\overline{\overline{c}\cdot\overline{d}\cdot\overline{b}\;\overline{a}\cdot\overline{e}}$

6) $\overline{\overline{d}\cdot\overline{a}\cdot\overline{c}\;\overline{b}\cdot\overline{e}}\;\overline{\overline{b}\cdot\overline{d}\cdot\overline{c}\;\overline{a}\cdot\overline{e}}$

Formeln die bestehen, wie man auch a, b, c, d, e verwechselt.

Sechs und sechszigste Aufgabe.

408. Wenn eine Curve, die in einer Ebene beschrieben ist, auf zwey senkrechte Axen, durch eine Gleichung zwischen Abscisse und Ordinate bezogen ist, die Tafel der vorzüglichsten, dem beschreibenden Punkte entsprechenden Veränderlichen zu bilden, alle in Werthen der Coordinaten, und Constanten ausgedrückt.

Ich werde mich zu dieser Tafel auf den Radius Vector, den Winkel, den er mit der Abscissenaxe macht, den Winkel, den die Tangente mit der Ordinate macht, die Subtangente, die Normale und noch einige gleich anzuführende Veränderliche beschränken.

Es sey M (Fig. 169.) der beschreibende Punkt, wir wollen beliebig auf der Axe einen Punkt B nehmen, das Dreyeck MAB bilden, und aus den Winkeln auf die gegenüberstehenden Seiten Perpendikel sen-

ken. Ich beſchränke mich auf dieſe Conſtruction, der man leicht ſo viel andere Linien, als man will, zuſetzen kann.

So wie nun der Punkt M fortrückt, werden $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MT}$, $\overline{MN}$, $\overline{MP}$, $\overline{AQ}$, $\overline{MR}$ u. ſ. w., ſo wie ihre Segmente $\overline{AK}$, $\overline{MK}$, $\overline{RK}$ u. ſ. w. und die Winkel $M\hat{A}B$, $A\hat{M}B$ u. ſ. w. den Werth verändern. Es ſind alſo eben ſo viel Veränderliche, von denen man 2 zu Coordinaten der Curve nehmen kann, und die ich in die Tafel aufnehmen werde.

Einige Glieder der Tafel können, wie man weiſs, nur durch Differentialformeln allgemein ausgedrückt werden, und werden erſt durch die Anwendung auf jeden einzelnen Fall endlich.

Es ſey nun
die Abſciſſe $\overline{AP} = x$
die Ordinate $\overline{MP} = y$
die Entfernung AB des Punktes B vom Anfangspunkt A der Coordinaten $= a$
ſo hat man folgende Tafel:

Werthe der Winkel.

1) $tg\ A\hat{M}P = \dfrac{x}{y}$

2) $tg\ B\hat{M}P = \dfrac{a-x}{y}$

3) $tg\ A\hat{M}B = \dfrac{ay}{yy - x(a-x)}$

4) $tg\ B\hat{A}K - \dfrac{a-x}{y}$

5) $tg\ M\hat{A}K = \frac{yy - x(a-x)}{ay}$

6) $tg\ M\hat{A}B = \frac{y}{x}$

7) $tg\ A\hat{B}K = \frac{x}{y}$

8) $tg\ M\hat{B}K = \frac{yy - x(a-x)}{ay}$

9) $tg\ M\hat{B}A = \frac{y}{a-x}$

10) $tg\ A\hat{K}P = \frac{y}{a-x}$

11) $tg\ B\hat{K}P = \frac{y}{x}$

12) $tg\ A\hat{K}B = \frac{ay}{x(a-x) - yy}$

13) $tg\ M\hat{T}P = \frac{dy}{dx}$

14) $tg\ T\hat{M}A = \frac{ydx - xdy}{xdx + ydy}$

Werthe der Linien.

15) $\overline{AB} = a$

16) $\overline{AP} = x$

17) $\overline{MP} = y$

18) $\overline{BP} = a - x$

19) $\overline{KP} = \frac{x(a-x)}{y}$

20) $\overline{KG} = \frac{x(yy - x(a-x))}{y\sqrt{(xx+yy)}}$

21) $\overline{KH} = \frac{(a-x)(yy - x(a-x))}{y\sqrt{((a-x)^2 + yy)}}$

22) $\overline{AM} = \sqrt{(xx + yy)}$

23) $\overline{BM} = \sqrt{((a - x)^2 + yy)}$

24) $\overline{AH} = \dfrac{ay}{\sqrt{((a - x)^2 + yy)}}$

25) $\overline{BG} = \dfrac{ay}{\sqrt{(xx + yy)}}$

26) $\overline{MK} = \dfrac{yy - x(a - x)}{y}$

27) $\overline{AK} = \dfrac{x}{y}\sqrt{(yy + (a - x)^2)}$

28) $\overline{BK} = \dfrac{a - x}{y}\sqrt{(yy + (a - x)^2)}$

29) $\overline{MG} = \dfrac{yy - x(a - x)}{\sqrt{(xx + yy)}}$

30) $\overline{AG} = \dfrac{ax}{\sqrt{(xx + yy)}}$

31) $\overline{MH} = \dfrac{yy - x(a - x)}{\sqrt{((a - x)^2 + yy)}}$

32) $\overline{BH} = \dfrac{a(a - x)}{\sqrt{((a - x)^2 + yy)}}$

33) $\overline{GH} = \dfrac{a(y - x(a - x))}{\sqrt{(xx + yy)((a - x)^2 + yy)}}$

34) $\overline{GP} = \sqrt{\left(\dfrac{yy + (a - x)^2}{xx + yy}\right)}$

35) $\overline{HP} = (a - x)\sqrt{\left(\dfrac{xx + yy}{yy + (a - x)^2}\right)}$

36) $\overline{TP} = y\dfrac{dx}{dy}$

37) $\overline{TQ} = \dfrac{xdxdy - ydx^2}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$

38) $\overline{PN} = y\dfrac{dy}{dx}$

39)

39) $\overline{MT} = y \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)}$

40) $\overline{AQ} = \frac{x dy - y dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$

41) $\overline{MN} = y \sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + 1\right)}$

42) $\overline{MR} = \frac{-dy}{d\left(\frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}\right)}$

W e r t h e d e r F l ä c h e n.

43) $\overline{\overline{\overline{AMB}}} = \frac{1}{2} ay$

44) $\overline{\overline{\overline{AMP}}} = \frac{1}{2} xy$

45) $\overline{\overline{\overline{BMP}}} = \frac{1}{2} (a - x) y$

46) $\overline{\overline{\overline{AKB}}} = \frac{ax (a - x)}{2y}$

47) $\overline{\overline{\overline{AKP}}} = \frac{xx (a - x)}{2y}$

48) $\overline{\overline{\overline{BKP}}} = \frac{x (a - x)^2}{2y}$

49) $\overline{\overline{\overline{AMK}}} = \frac{x (yy - x (a - x))}{2y}$

50) $\overline{\overline{\overline{BMK}}} = \frac{1}{2} a (a - x)$

409. Man ſieht leicht, wie durch Verbindung der einzelnen Glieder der Tafel nur aus dieſen 50 eine ungeheuere Menge neuer Formeln abgeleitet werden können.

An einigen Beyſpielen wollen wir den Gebrauch der Tafel zeigen.

Sieben und sechszigste Aufgabe.

410. Die Gleichung der Curve ist zwischen der Abscisse $\overline{AB}$ (Fig. 169.) und der Ordinate $\overline{MP}$ gegeben, man soll ihre Gleichung zwischen dem Radius Vector $\overline{AM}$ und dem Winkel $M\hat{A}B$ finden.

Es sey

$$\overline{AM} = r$$
$$M\hat{A}B = \phi.$$

Die Formeln (6, 22.) geben

$$tg\phi = \frac{y}{x}$$
$$r = \sqrt{(xx + yy)}$$

man braucht also nur aus diesen beyden Formeln die Werthe von x, y in Werthen von r, ϕ zu ziehen und sie in die Gleichung zwischen x, y zu substituiren. So erhält man

$$x = r \,.\, cos\,\phi$$
$$y = r \,.\, sin\,\phi$$

Acht und sechszigste Aufgabe.

411. Die Gleichung der Curve AMB (Fig. 169.) in x, y, ist gegeben, man soll das Coordinatensystem so verändern, daſs die neue Gleichung zwischen $\overline{AP}$, $\overline{KP}$ statt findet, wo $\overline{AP}$ die alte Abscisse ist, $\overline{KP}$ aber das Perpendikel auf die Abscissenaxe aus K gesenkt, wo sich die Perpendikel aus A, B, auf $\overline{BM}$, $\overline{AM}$ gesenkt kreuzen.

Man kann die Aufgabe auch ausdrücken

Den geometrischen Ort aller Punkte K zu finden, wo sich die 3 Perpendikel im Dreyeck MAB aus den Winkeln auf die gegenüberstehenden Seiten schneiden.

Es sey

$$KP = z$$
$$AB = a$$

so haben wir Form. 19.

$$z = \frac{x\,(a - x)}{y}$$

oder

$$y = \frac{x\,(a - x)}{z}$$

Substituirt man diesen Werth von y in die gegebene Gleichung der Curve, so hat man die gesuchte Gleichung zwischen x und z.

412. Es sey z. B. (Fig. 170.) die Curve eine Ellipse und $\overline{AB}$ die grosse Axe. So ist die Gleichung

$$yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$$

Setzt man in die Gleichung

$$y = \frac{x\,(a - x)}{z}$$

so erhält man

$$xx\,(a - x)^2 = zz\frac{bb}{aa}\,(ax - xx)$$

oder wenn man mit $\dfrac{aa}{bb\,x\,(a - x)}$ multiplicirt

$$zz = \frac{aa}{bb}(ax - xx)$$

d. h. der gesuchte Ort ist eine neue Ellipse, deren kleine Axe $= a$, und deren grosse Axe $= \frac{aa}{b}$ d. h. gleich dem Parameter der kleinen Axe der ersten Ellipse.

Neun und sechszigste Aufgabe.

413. Die Gleichung einer Curve ist zwischen den Winkeln $M\hat{A}B$, $M\hat{B}A$ gegeben, man sucht sie zwischen $\overline{AP}$ und $\overline{MP}$.

Es sey

$$M\hat{A}B = \phi$$
$$M\hat{B}A = \psi$$

so geben die Formeln (6, 9.)

$$tg\,\phi = \frac{y}{x}$$

$$tg\,\psi = \frac{y}{a - x}$$

414. Die Gleichung sey z. B.

$$\phi + \psi = m$$

wo m eine Constante ist. Da also

$$\phi = m - \psi$$

oder

$$tg\,\phi = \frac{tg\,m - tg\,\psi}{1 + tg\,m . tg . \psi}$$

oder

$$tg\,\phi + tg\,m . tg\,\psi . tg\,\phi = tg\,m - tg\,\psi$$

Die Subſtitution giebt alſo

$$tg\,m.xx + tg\,m.yy - a\,tg\,m.x + ay = 0$$

eine Gleichung des Kreiſes.

415. Wäre die Gleichung

$$\phi - \psi = m$$

geweſen, ſo würde man eben ſo

$$tg\,xx - tg\,m\,yy - a\,tg\,m\,x + ay = 0$$

eine Gleichung für die Hyperbel erhalten haben, was wir ſchon für den Fall, wenn

$$m = \pi$$

(105.) geſehen haben.

416. Wäre die Gleichung zwiſchen x, y gegeben, und ſollte man die zwiſchen ϕ, ψ ſuchen, ſo kann man nur die Werthe (413.) ſubſtituiren. So hat man

$$x \,.\, tg\,\phi = y$$

$$a\,tg\,\psi - x\,tg\,\psi = y$$

alſo

$$x = \frac{a \,.\, tg\,\psi}{tg\,\phi + tg\,\psi}$$

$$y = \frac{a \,.\, tg\,\phi \,.\, tg\,\psi}{tg\,\phi + tg\,\psi}$$

Sucht man z. B. die Gleichung der graden Linie, welche der Punkt M beſchreibt, indem man ſie auf zwey feſte Axen A, B bezieht, und zu Coordinaten die Winkel $M\hat{A}B$, $M\hat{B}A$ (Fig. 171.) nimmt, ſo ſubſtituirt man die gefundenen Werthe, in die Gleichung

$$y = nx + m$$

und erhält

$$a\,tg\,\phi \,.\, tg\,\psi = m \,.\, tg\,\phi + m\,tg\,\psi + na\,tg\,\psi$$

oder

$$tg\,\phi \,.\, tg\,\psi = \frac{m}{a}\,tg\,\phi + \frac{m+na}{a}\,tg\,\psi = 0$$

Die Gleichung für die grade Linie alſo, wenn man ſie durch Winkel auf 2 feſte Punkte bezieht, hat die Geſtalt

$$tg\,\phi \,.\, tg\,\psi + A\,tg\,\phi + B\,tg\,\psi = 0$$

417. Man ſieht alſo, daſs das neue Coordinatenſyſtem auch den Grad der Gleichung für die Curve verändert, z. B. die grade Linie einen Grad höher macht, den Kreis einen Grad niedriger.

Allgemein ſind alle Kegelſchnitte auf ihre Brennpunkte bezogen, nur vom erſten Grade. Eben ſo die Conchoïde und Ciſſoïde, die auf rechtwinklichte Axen bezogen, Gleichungen vom 4ten Grade haben werden lineär, wenn man die Gröſsen, die, man gewöhnlich zu ihrer Conſtruction braucht, als Coordinaten annimmt.

418. Man hat alſo nicht immer die Gleichung der Curve in ihrer gröſsten Einfachheit, wenn man ſie auf 2 rechtwinklichte Axen bezieht. Es mag dieſs gerne die beſte Art ſeyn, die Curven im Allgemeinen zu vergleichen, es iſt aber gewiſs nicht immer das leichteſte Mittel die Eigenſchaften einer jeden insbeſondere zu finden.

Siebenzigſte Aufgabe.

419. Die Gleichung einer Curve iſt zwiſchen $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ (Fig. 169.) gegeben, man ſucht ſie zwiſchen $\overline{AP}$, $\overline{MP}$.

Es ſey

$$\overline{MA} = u$$
$$\overline{MB} = v$$

Die Formeln (22, 23.) geben

$$u = \sqrt{(xx + yy)}$$
$$v = \sqrt{((a-x)^2 + yy)}$$

Die Gleichung ſey z. B.

$$u = mv$$

wo m eine Conſtante iſt, ſo iſt die Gleichung in x, y

$$\sqrt{(xx+yy)} = m\sqrt{((a-x)^2 + yy)}$$

oder

$$xx(1-mm) + yy(1-mm) + 2amx - mmaa = 0$$

eine Gleichung für den Kreis

Ein und ſiebenzigſte Aufgabe.

420. Die Gleichung einer Curve iſt zwiſchen den Coordinaten $\overline{AG}$, $\overline{BG}$ (Fig. 169.) gegeben, man ſenkt ſie zwiſchen $\overline{AP}$, $\overline{MP}$.

Es ſey

$$\overline{AH} = u$$
$$\overline{BG} = v$$

ſo geben die Formeln (24, 25.)

$$u = \frac{ay}{\sqrt{((a-x)^2 + yy)}}$$

$$v = \frac{ay}{\sqrt{(xx+yy)}}$$

Zwey und ſiebenzigſte Aufgabe.

421. Die Gleichung einer Curve iſt zwiſchen den Flächen $\overline{\overline{AMK}}$, $\overline{\overline{BMK}}$ (Fig. 169.) gegeben, man ſucht ſie zwiſchen $\overline{AP}$, $\overline{MP}$.

Es ſey

$$\overline{\overline{AMK}} = u$$
$$\overline{\overline{MBK}} = v$$

Die Formeln (49, 50.) geben

$$u = \frac{(xyy - x(a-x))}{2y}$$
$$v = \tfrac{1}{2}\, a\,(a-x)$$

Drey und ſiebenzigſte Aufgabe.

422. Die Gleichung einer Curve iſt zwiſchen $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ (Fig. 169.) gegeben, man ſucht ſie zwiſchen $M\hat{A}B$, $M\hat{B}A$.

Es ſey

$$\overline{MA} = t$$
$$\overline{MB} = u$$
$$M\hat{A}B = \phi$$
$$M\hat{B}A = \psi$$

ſo geben die Formeln (22, 23, 6, 9.)

$$t = \sqrt{(xx + yy)}$$
$$u = \sqrt{((a-x)^2 + yy)}$$
$$tg\,\phi = \frac{y}{x}$$
$$tg\,\psi = \frac{y}{a-x}$$

eliminirt man vermittelſt dieſer Gleichungen die Veränderlichen x, y, ſo hat man zwey Gleichungen zwiſchen t, u, ϕ, ψ, man zieht daraus die Werthe von t, u, die man in die Gleichung der Curve ſetzen muſs, ſo erhält man

$$t = \frac{a\, tg\, \psi . sec. \phi}{tg\, \phi + tg\, \psi}$$

$$u = \frac{a\, tg\, \phi\, sec. \psi}{tg\, \phi + tg\, \psi}$$

Vier und ſiebenzigſte Aufgabe.

423. Die Gleichung einer Curve iſt zwiſchen dem Radius Vector $\overline{AM}$, und dem Krümmungshalbmeſſer $\overline{MR}$ gegeben, man ſucht die Gleichung zwiſchen $\overline{AP}$ und $\overline{MP}$ (Fig. 169.)

Es ſey

$$\overline{AM} = r$$
$$\overline{MR} = \varrho$$

ſo geben die Formeln (22, 42.)

$$r = \sqrt{(xx \pm yy)}$$

$$\varrho = - \frac{dy}{d\left(\frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}\right)}$$

Fünf und ſiebenzigſte Aufgabe.

424. Die Gleichung einer Curve iſt zwiſchen den beyden Producten $\overline{AP}.\overline{MB}$, und $\overline{BP}.\overline{MA}$ jedes als eine einzige Veränder-

liche betrachtet gegeben, man ſucht ſie zwiſchen $\overline{AP}$, und $\overline{MP}$ (Fig. 169.)

Es ſey

$$\overline{AP} \cdot \overline{MB} = u$$
$$\overline{BP} \cdot \overline{MA} = v$$

ſo geben die Formeln (16, 22, 17, 23.)

$$u = x \sqrt{((a-x)^2 + yy)}$$
$$v = y \sqrt{(xx + yy)}$$

425. Aus den vorigen Beyſpielen ſieht man, wie wichtig die Umformung der Coordinaten, im allgemeinſten Sinne genommen, für die Theorie der Curven ſey. Und doch muſs man eine wichtige Bemerkung dabey machen, daſs, wie man auch immer das Syſtem umforme, mag man die Curve auf Punkte, Axen oder andere Gegenſtände beziehen, man immer doch nothwendigerweiſe Betrachtungen, die der Natur der Curve fremd ſind, in die Gleichung bringt; denn die Natur der Curve beſteht in ihrer Form, und in der Lage ihrer Punkte gegen einander, aber nicht in ihrer abſoluten Lage gegen feſte Punkte im Raume.

426. Man kann die Curve von den feſten Gegenſtänden im Raume losmachen, wenn man dieſe feſten Gegenſtände ſelbſt als beweglich, und als ſolche, die ein Syſtem mit der Curve ausmachen, betrachtet. Wenn z. B. eine Curve auf 2 feſte Axen im Raume bezogen iſt, ſo kann man ſich vorſtellen, daſs dieſe Axen an der Curve hängen, und mit ihr bewegt werden. Dann iſt aber die erſte Schwierigkeit durch eine andere erſetzt. Das neue Syſtem iſt ganz von den feſten Gegenſtänden befreyt, die ſeine abſolute Lage

im Raume bestimmten, aber es ist dagegen auch verwickelter geworden, als die Natur der Aufgabe erfordert, denn das wirklich zu betrachtende System ist die isolirte Curve, und die Anheftung zweyer Axen macht ein complexes System daraus.

427. Man wird um so besser die Gleichung einer Curve von den willkührlichen Grössen befreyen, die durch ihre Lage gegen feste Axen hereinkommen, je weniger diese Gleichung in ihrer Form beschränkt ist. Z. B. die Eigenschaft der Sehnen, die sich im Kreise schneiden, stellt die Natur der Curve in einen allgemeinen Gesichtspunkt als ihre Gleichung auf 2 feste Axen bezogen. Denn da die Entfernungen dieser Axen vom Mittelpunkt in die Gleichung kommen müssen, so geben die Eigenschaften, die sie ausdrückt, wohl Mittel an die Hand, diese Curve nach der Reihe mit allen möglichen Axen zu vergleichen, wozu man nur den Werth der Entfernungen zu ändern braucht, aber kein Mittel, sie mit allen diesen Axen zugleich zu vergleichen, statt dass die Eigenschaften der Sehnen unabhängig von irgend einer Lage der Axen, und selbst vom Parameter (dem Radius) befreyt ist.

428. Eben daher sind die bekannten Eigenschaften (376.) der natürlichen Abscissen und Ordinaten, allgemeiner, als die der Abscissen im gewöhnlichen Sinne genommen.

429. Aber obgleich die Lage des Ursprungs der Coordinaten nicht in der Gleichung zwischen den natürlichen vorkommt, so bleibt doch die Richtung der Axen immer dieselbe, und folglich muss die Gleichung noch etwas Willkührliches enthalten, um diese

Richtung auszudrücken, die Form selbst dieser Gleichungen ist also noch nicht so unabhängig, als sie seyn könnte.

Um diese willkührlichen Gröfsen wegzuschaffen, die aus dem Parallelismus der Coordinaten entspringen, habe ich die Lehrsätze (377, 378.) aufgestellt, die also die Eigenschaften der Curve noch allgemeiner ausdrücken.

430. Die Axen, die Punkte u. s. w., die man zu dem Systeme hinzufügt, das man betrachten will, sind nur Hülfsmittel, die man zur Vergleichung braucht und die man nachher eliminiren mufs, um die unmittelbaren Verhältnisse, die man sucht, zu erhalten. Es würde aber immer eleganter seyn, wenn man direct die zu vergleichenden Quantitäten behandeln könnte.

431. In jeder Curve giebt es für jeden Punkt eine Linie, die von keiner besondern Annahme, von keinem, im absoluten Raume genommenem Mittel zur Vergleichung abhängt, und diese Linie ist der Krümmungshalbmesser, welcher allein durch die Gestalt der Curve bestimmt wird. Gäbe es für jeden Punkt noch eine zweyte eben so unabhängige Veränderliche, so könnte man, wenn man diese beyden als Coordinaten nähme, die Gleichung der Curve am allgemeinsten ausdrücken. Der Umfang der Curve könnte wohl diese zweyte Veränderliche seyn, wenn man nur nicht dann einen willkührlichen Punkt annehmen müfste, von dem an man ihn zählte.

432. Doch, glaube ich, kann man verschiedene Veränderliche finden, die diesem Zweck entsprechen,

z. B. der Winkel, den am beſchreibenden Punkte die Tangente mit der Linie macht, welche die in der Curve gezogenen unendlich kleinen Secanten, die dieſer Tangente parallel ſind, in zwey gleiche Theile theilt.

Es ſey durch den beſchreibenden Punkt M (Fig. 172.) eine Tangente $\overline{MT}$ gezogen, und eine Secante $\overline{mm'}$, die ihr parallel ſey. Aus dem Punkte M, und durch den Mittelpunkt dieſer Secante n wollen wir uns die unbeſtimmte Linie $\overline{MF}$ gezogen vorſtellen. $\overline{mm'}$ ſoll ſich ſtets der $\overline{MT}$ nähern, bis es in ſie fällt, dann iſt der letzte Werth oder die Gränze des Winkels $T\hat{M}F$ dasjenige, was ich zur zweyten Coordinate vorſchlage.

Man könnte auch den Winkel $K\hat{M}F$ nehmen. Eben ſo wenn man aus dem Endpunkte des Krümmungshalbmeſſers KF ſenkrecht auf $\overline{MF}$ zöge, ſo könnte man

$$\overline{MF}, \overline{KF}$$

oder

$$\overline{MK}, \overline{MF}$$

oder

$$\overline{MK}, \overline{KF}$$

zu Coordinaten nehmen, welche alle blos von der Geſtalt der Curve abhängen. Es ſey r der Krümmungshalbmeſſer für den Punkt M

$$T\hat{M}F = \phi$$

eine Gleichung zwiſchen r, ϕ wird die Natur der Curve ausdrücken.

Nennt man z. B. den Parameter $= p$, die Normale $= n$, ſo hat man in der Parabel

$$r = \frac{4n^3}{pp}$$

$$cotang\ \phi = -2\sqrt{\left(\frac{x}{p}\right)}$$

oder weil

$$n = \sqrt{(yy + \tfrac{1}{4}pp)}$$

$$r = \frac{4(yy + \tfrac{1}{4}pp)^{\frac{3}{2}}}{pp}$$

$$cotang\ \phi = -2\sqrt{\left(\frac{x}{p}\right)}$$

Zieht man aus dieſen beyden Gleichungen die Werthe von x, y, und ſubſtituirt ſie in der Gleichung

$$yy = px$$

ſo hat man die geſuchte Gleichung in r, ϕ,

$$r = \tfrac{1}{2}\, p\ coſec.\ \phi^3$$

Hätte man ſo die Gleichung jeder Curve, und wollte auf die zurückkommen, die zwiſchen der Abſciſſe und Ordinate beſteht, ſo muſste man die Werthe von r, ϕ, in x, y ſuchen. Man kennt ſchon

$$r = -\frac{dy}{d\left(\frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}\right)}$$

es kommt alſo nur darauf an, den Werth von ϕ in x, y zu ſuchen.

Sechs und ſiebenzigſte Aufgabe.

433. Den Werth von ϕ in x, y, die unter einander ſenkrecht ſind, zu finden.

Es ſey $\widehat{mMm'}$ (Fig. 172.) ein unendlich kleines Stück der vorgegebenen Curve, M der beſchreibende Punkt,

$\overline{TP}$ die Abſciſſenaxe,

$\overline{MP}$ die Ordinate,

$\overline{MT}$ die Tangente,

$\overline{mm'}$ eine unendlich kleine mit $\overline{MT}$ parallele Sehne,

$\overline{MF}$ die Linie, welche dieſe Sehne in n, in zwey gleiche Theile theilt,

o der Punkt, wo dieſe Sehne von der Ordinate $\overline{MP}$ geſchnitten wird,

$\overline{mp}$, $\overline{mp'}$ die den Punkten m, m', entſprechenden Ordinaten,

g, h, die Durchſchnittspunkte dieſer. Ordinaten mit der Tangente,

$\overline{mrr''}$ die Linie, die ſenkrecht von m auf $\overline{MP}$ und $\overline{m'p'}$ gezogen iſt,

$\overline{Mr'}$ das Perpendikel aus M auf $\overline{m'p'}$,

$\overline{MK}$ der Krümmungshalbmeſſer.

Wir haben offenbar

$$\overline{mr} = dx$$

$$\overline{Mr} = dy$$

$$\overline{Mr'} = dx + ddx$$

$$\overline{r'm'} = dy + ddy$$

$$\overline{mr''} = 2dx + ddx$$

$$\overline{m'r''} = 2\,dy + ddy$$

Dann geben die ähnlichen Dreyecke mro, Mrh

$$\frac{\overline{mr}}{\overline{ro}} = \frac{\overline{Mr}}{\overline{r'h}} = \frac{\overline{Mr'} - \overline{mr}}{\overline{r'h} - \overline{ro}}$$

oder

$$\frac{dx}{dy - \overline{Mo}} = \frac{ddx}{(r'm' + m'h) - (\overline{Mr} - \overline{Mo})}$$

oder weil $\overline{m'h} = \overline{Mo}$

$$\frac{dx}{dy - \overline{Mo}} = \frac{ddx}{ddy + 2\overline{Mo}}$$

alſo,

$$dx \,.\, ddy + 2\, dx\, \overline{Mo} = dy \,.\, ddx - ddx \,.\, \overline{Mo}$$

Wirft man das letzte Glied als unendlich klein gegen die andern weg, ſo haben wir

$$\overline{Mo} = \frac{dy\, ddx - dx \,.\, ddy}{2\, dx} \quad \text{(A)}$$

Jetzt ſuche ich $\overline{mn}$ oder $\frac{1}{2}\, \overline{mm'}$. Es iſt

$$\overline{mm'^2} = \overline{mr''^2} + \overline{m'r''^2} = (2dx + ddx)^2 + (2dy + ddy)^2$$

alſo wenn man die Gröſsen höherer Ordnungen wegwirft

$$\overline{mn}^2 = dx^2 + dy^2 + dx \,.\, ddx + dy \,.\, ddy \ldots \text{(B)}$$

Eben ſo haben wir

$$\overline{mo}^2 = dx^2 + \overline{ro}^2 = dx^2 + (\overline{Mr} - \overline{Mo})^2 = dx^2 + dy^2 - 2\, dy \,.\, \overline{Mo} \ldots \text{(C)}$$

Ziehen wir (C) von (B) ab, ſo erhalten wir

$$\overline{mn}^2 - \overline{mo}^2$$

oder

$$(\overline{mn} + \overline{mo})\, (\overline{mn} - \overline{mo}) = dx\, ddx + dy\, ddy + 2\, dy\, \overline{Mo}$$

und

und setzen wir in diese Gleichung den vorher bey (A) gefundenen Werth von $\overline{Mo}$, so haben wir, da $\overline{mn} - \overline{mo} = \overline{no}$

$$(\overline{mn} + \overline{mo})\ \overline{no} = \frac{ddx\,(dx^2 + dy^2)}{dx}$$

Da nun, wenn wir die höhern Differentiale vernachlässigen,

$$\overline{mn} + \overline{mo} = 2\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

so haben wir

$$\overline{no} = \frac{ddx}{2\,dx}\sqrt{(dx^2 + dy^2)} \ldots \text{(D)}$$

Das Dreyeck *Mno* giebt

$$\frac{\overline{Mo}}{\overline{no}} = \frac{\sin M\hat{n}o}{\sin n\hat{M}o} = \frac{\sin T\hat{M}n}{\sin(T\hat{M}n - T\hat{M}o)}$$

oder

$$\frac{\overline{Mo}}{\overline{no}} = \frac{\sin T\hat{M}n}{\sin T\hat{M}n \,.\, \cos T\hat{M}o - \sin T\hat{M}o \,.\, \cos T\hat{M}n}$$

also

$$\overline{no} \,.\, \sin T\hat{M}n = \overline{Mo} \,.\, \sin T\hat{M}n \,.\, \cos T\hat{M}o - \overline{Mo} \,.\, \sin T\hat{M}o \,.\, \cos T\hat{M}n$$

oder

$$\overline{no} = \overline{Mo} \,.\, \cos T\hat{M}o - \overline{Mo} \,.\, \sin T\hat{M}o \,.\, \operatorname{cotang} T\hat{M}n$$

oder

$$\operatorname{cotang} T\hat{M}n = \operatorname{cotang} T\hat{M}o - \frac{\overline{no}}{\overline{Mo} \,.\, \sin T\hat{M}o}$$

Substituirt man die Werthe von $\overline{no}$, $\overline{Mo}$, und bemerkt, dass

$$\sin T\hat{M}o = \frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$$

$$\cos T\hat{M}o = \frac{dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$$

$$cotang\ T\hat{M}o = \frac{dy}{dx}$$

so hat man

$$cotang\ T\hat{M}n = \frac{dy}{dx} + \frac{ddx\,(dx^2 + dy^2)}{dx^3\ d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

oder

$$cotang\ T\hat{M}n = \frac{dy}{dx} + \frac{ddx\,(dx^2 + dy^2)}{dx(dx\,ddy - dy\,ddy)} \ldots\ldots (E)$$

434. Im Kreise z. B. müssen die Bogen $\overline{mM}$, $\overline{m'T}$ gleich, oder

$$dds = 0$$

seyn, wenn mm' der Tangente $\overline{MT}$ parallel seyn soll.

Differentiirt man also die Gleichung

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

so hat man

$$ds\,.\,dds = dx\,ddx + dy\,ddy$$

da aber

$$dds = 0$$

so ist auch

$$dx\,ddx + dy\,ddy = 0$$

was

$$ddy = -\frac{dx\,.\,ddx}{dy} \text{ giebt.}$$

Setzt man diesen Werth in (E), so hat man

$$cotang\ T\hat{M}n = \frac{dy}{dx} + \frac{ddx\,(dx^2 + dy^2)}{dx\left(\frac{-dx^2\,ddx - dy^2.ddx}{dy}\right)}$$

oder

$$cotang\ T\hat{M}n = \frac{dy}{dx} - \frac{dy\,(dx^2 + dy^2)}{dx\,(dx^2 + dy^2)} = 0$$

Schluſs.

435. Obgleich alle mathematiſche Wahrheiten vollkommen gewiſs ſind, ſo haben ſie doch nicht alle einen gleichen Grad von Evidenz, vorzüglich ſind es die erſten Begriffe, die ſehr ſchwierig den geſuchten Grad von Deutlichkeit erhalten. Indeſſen darf das den Lauf des Lehrlings nicht aufhalten, haben doch die Alten, obgleich ſie die Theorie der Parallelen nicht ganz aufklären konnten, ihre fernern Unterſuchungen darum nicht beſchränkt.

So haben die Neuern, obgleich der Begriff des Unendlichen Schwierigkeiten hatte, doch dem Infiniteſimalcalcul alle Entwickelungen gegeben, die man von ihrem Scharfſinn erwarten konnte. Eben ſo wenig iſt die Algebra durch die Dunkelheit aufgehalten, in der der Begriff negativer Quantitäten blieb.

d'Alembert ſagte zu jemand, der ſich über das Zwielicht beklagte, das ein gewiſſer Beweis in ſeinem Kopfe gelaſſen hatte: „gehn Sie nur weiter, „der Glaube wird ſchon kommen!“ obgleich eben der d'Alembert vielleicht mehr als ein anderer Geometer über die Metaphyſik der Wiſſenſchaften gearbeitet hat. Er nahm nach der Reihe die 3 eben angeführten Unterſuchungen über die Theorie der Parallelen, den Begriff des Unendlichen, und der negativen Quantitäten vor, und hat doch, wenn er auch ſeinen Gegenſtand nicht ganz erſchöpfte, allenthalben hin einzelne Lichtſtrahlen verbreitet. Seine Betrachtungen haben andere Geometer aufgeweckt. So gaben Bertrand und Legendre eine lichtvolle Theorie der

Parallelen, deren Theorie wohl an einem Urbegriffe hängt, der mir beynahe eben so klar wie der Begriff der vollkommenen Gleichheit oder des Deckens erscheint, ich meyne den Begriff der Aehnlichkeit. Ich glaube, man kann es als einen der evidentesten Begriffe festsetzen, dass das, was im Grossen da ist, wie z. B. eine Kugel, ein Haus, eine Zeichnung, auch im Kleinen gemacht werden kann, und umgekehrt, dass folglich, welche Figur man sich auch denkt, man sich andere von allen Grössen, und der ersten ähnliche denken kann, d. h. deren Dimensionen dasselbe Verhältniss unter einander haben als die der ersten. Es kommt ja blos darauf an, dass ich das Haus, die Kugel u. s. w. ganz isolirt, und nicht mit andern Gegenständen zugleich betrachte, oder was einerley ist, nicht mit der allgemeinen beständigen Einheit messe, sondern mit einer andern veränderlichen, die mit der Figur, deren Theil sie ist, wächst und abnimmt. Jeder kann z. B. die Höhe der Thür als Maassstab des Hauses brauchen: Ist dieser Begriff einmal zugegeben, so kann man leicht die Theorie der Parallelen begründen, ohne Zuflucht zu dem Unendlichen zu nehmen.

Andere Geometer, und vorzüglich L'huillier, haben den Begriff der Infinitesimalquantitäten aufgeklärt. Die negativen Quantitäten waren übrig, deren Theorie wenige zu ergründen suchten, obgleich sie es verdient, da sie der Algebra zum Grunde liegt, und die gewöhnlich angenommenen Begriffe nicht nur dunkel, sondern sogar falsch sind, und folglich zu Fehlschlüssen verleiten können. Ich unternahm diese

Unterſuchung und den Ideen, die dabey ſich mir darboten, verdankt dieſs Werk, das ich jetzt dem Publicum vorlege, ſeinen Urſprung. Ich habe mich beſtrebt, die Untauglichkeit dieſer falſchen Begriffe darin in ihr volles Licht zu ſtellen, und zu zeigen, daſs, wenn man das dunkele Raiſonnement, mit dem man ſie gewöhnlich begründet, bey Seite ſetzt, alle Schwierigkeiten von ſelbſt verſchwinden, ohne daſs man etwas an dem gewöhnlichen Verfahren der Rechnung zu ändern brauche.

Als ich dieſe Betrachtungen erweiterte, und die Eigenſchaften der Veränderung der Zeichen + und — in den Formeln zu erklären ſuchte, ſah ich, daſs ihr wahrer Gebrauch in dieſer Hinſicht, darin beſtehen müſſe, alle Figuren ähnlicher Art auf eine Urfigur zu beziehen, die den Betrachtungen, wie man die Formeln ſuchte, zum Grunde lag. Aehnliche Figuren nenne ich hier ſolche, deren Conſtruction weſentlich dieſelbe iſt, und die nur durch Verſetzung eines oder mehrerer ihrer entſprechenden Theile verſchieden ſind. Darauf gründet ſich das, was ich Correlation der Figuren nannte, der Gegenſtand eines früher von mir verfaſsten Werks. Das jetzt vollendete Werk iſt nur eine Ausdehnung des früheren, ich habe hier nicht allein die Verhältniſſe der Figuren unter ſich betrachtet, ſondern auch die beſondern Eigenſchaften der Urfigur, welche ich in einer allgemeinen Tafel, die ſie implicite alle umfaſst, darzuſtellen geſucht habe. Aus allem dieſem bildete oder vielmehr entwarf ich, den Lehrbegriff, den ich Geometrie der Stellung nenne.

Die in diesem Werke vorgetragene Geometrie der Stellung und Methode der Tafeln, scheint mir, wenn sie mehr vervollkommnet ist, eine ergiebige Quelle anziehender und nützlicher Resultate. Jede Zeile einer Tafel ist, wie ich vorher bemerkte, ein Lehrsatz in Formeln gebracht, man braucht sie blos so zu ordnen, dass man, wenn es nöthig thut, jede finden kann. Man hat (128. u. folgende) gesehen, wie man aus Verbindung dieser Formeln eine Menge neuer ziehen kann. So unmöglich und unnöthig es wäre, alle diese so entstandenen besondern Sätze in einem Lehrbegriffe der Geometrie zu umfassen, oder gar sein Gedächtniss damit zu beladen, so nützlich und angenehm ist eine solche Uebung für Lehrlinge, denen man Bildung solcher Tafeln, Vergleichung der Formeln u. s. w., nicht genug empfehlen kann.

Eine solche Art von Sätzen waren die Porismen der Alten. Nicht von der Analyse unterstützt, bedienten sie sich dieser Sätze, um eben so einfache als elegante Auflösungen von damals (und zum Theil noch) schweren Aufgaben zu erhalten.

Es scheint, dass diese Geometrie der Alten noch mehr in England als auf dem Continent getrieben wird. Robert Simson hat die von Pappus gesammelten wiederhergestellt und bewiesen, auch mehrere in seinem Werke

Opera quaedam reliqua etc.

generalisirt. Matthews Stewart erfand viele mitunter sehr interessante, die er in zwey Werken

Propositiones geometricae more veterum demonstratae

und

Some general theorems of considerable use in the higher parts of mathematics

bekannt machte. Beyde Werke verdienten in das Französische, und das letzte commentirt zu werden, da es keine Beweise enthält, die sich aber durch die Theorie der Punkte der mittleren Entfernungen leicht führen lassen.

Aus den Tafeln in diesem Werke kann man leicht eine grosse Menge Porismen ziehen, wovon ich schon viele angeführt habe, und hier noch 2 zusetzen will, aus (218, 392):

I.

Es sey ABC (Fig. 173) ein eingeschriebenes Dreyeck, dessen Seiten von einer Transversale $\overline{mnp}$, in m, n, p, geschnitten werden. Wenn wir die Tangenten, die man aus m, n, p, an den Kreis ziehen kann, m', n', p' nennt, so ist

$$m'n'p' = \overline{An} \cdot \overline{Bm} \cdot \overline{Cp} = \overline{Am} \cdot \overline{Bp} \cdot \overline{Cn}$$

II.

In einem Kreise $AmBm'$ (Fig. 174) wollen wir eine Sehne $\overline{AB}$, und durch A, B, die beyden Tangenten $\overline{Ap}$, $\overline{Bq}$, und eine beliebige Transversale $\overline{pqmm'}$ ziehen, die den Kreis in m, m', und die Sehne in K schneidet, dann hat man

$$\left(\frac{\overline{mk}}{\overline{m'k}}\right)^2 = \frac{\overline{mp} \cdot \overline{mq}}{\overline{m'p} \cdot \overline{m'q}}$$

Fallen die Punkte p, q, in o zuſammen, wo ſich die Tangenten ſchneiden, ſo iſt

$$\frac{\overline{mk}}{\overline{m'k}} = \frac{\overline{mo}}{\overline{m'o}}$$

was unter Simſons Porismen vorkommt.

Ich endige das Werk mit einigen Betrachtungen über die Art, die ich im 2ten Abſchnitt vorſchlug, die Correlation der Figuren darzuſtellen.

Jeder weiſs, wie viel leichter es iſt, einen etwas verwickelten Satz zu faſſen und anzuwenden, wenn er in eine algebraiſche Formel gebracht, als wenn er durch Sprache ausgedrückt und gleichſam breit getreten wird. Doch ſtellen die algebraiſchen Zeichen nur abſolute Werthe der Quantitäten vor, und man beſtimmt ihre reſpective Lage und andere nicht direct in Gleichung zu ſetzende Verhältniſſe durch Sprache. Könnte man nun auch dieſe letzten Verhältniſſe durch Zeichen ausdrücken, ſo würde ein neuer Vortheil, nemlich, die gröſsere Leichtigkeit die Formeln zu faſſen, und anzuwenden, daraus entſtehen. Das iſt der Zweck der im zweyten Abſchnitte vorgeſchlagenen Bezeichnung, die man noch weiter ausdehnen könnte, um viele Umſchreibungen zu vermeiden. Ich glaubte nicht weiter darin gehen zu dürfen, weil dieſe Zeichen, noch nicht durch den Gebrauch geläufig geworden, leicht einigen Mathematikern misfallen könnten. Es ſey mir nur erlaubt, das in dieſer Hinſicht Geſagte noch etwas zu entwickeln.

Eine t e c h n i ſ c h e F o r m e l iſt mir eine ſolche, welche die reſpective Stellung verſchiedener Quanti-

täten ausdrückt, wenn die algebraische Formel das Verhältniss ihrer Grössen darstellt.

Es kann Formeln geben, die zugleich technisch und algebraisch sind: z. B. die Formeln (228), auch könnte man die in den Aufgaben XVI, XVII, u. s. w. gefundenen leicht darauf zurückbringen. Um z. B. die der Aufgabe XVI technisch zu machen, braucht man sie nur so auszudrücken:

Im Dreyecke ABC senke man aus jedem Winkel ein Perpendikel auf die gegenüberstehende Seite. Es sey ferner

$$B\hat{A}C = A$$
$$A\hat{B}C = B$$
$$A\hat{C}B = C$$

der Radius des umschriebenen Kreises $= R$, Der Punkt, wo die Perpendikel sich schneiden $\ddagger D$

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} \ddagger H$$
$$\overline{BD} \cdot \overline{AC} \ddagger G$$
$$\overline{CD} \cdot \overline{AB} \ddagger F$$
$$\overline{BC} \cdot \overline{FG} \ddagger L$$
$$\overline{AC} \cdot \overline{FH} \ddagger M$$
$$\overline{AB} \cdot \overline{GH} \ddagger N$$
$$\overline{AH} \cdot \overline{FG} \ddagger l$$
$$\overline{BG} \cdot \overline{FH} \ddagger m$$
$$\overline{CF} \cdot \overline{GH} \ddagger n$$

so hat man

1) $B\hat{A}C = A$

2) $A\hat{B}C = B$ u. s. w.

d. h. alle 101 Formeln in (167).

Der Vortheil dieser technischen Form besteht darin, dafs, wenn ich diese 101 Formeln oder einige von ihnen auf ein beliebiges Dreyeck anwenden will, z. B, auf *XYZ*, die Sache sehr leicht wird, da man nur die Correlation der Construction zwischen den beyden Figuren darzustellen, oder ihre correspondirende Punkte zu suchen braucht. Soll z. B.

X dem *A*
Y dem *B*
Z dem *C*

entsprechen, so finde ich gleich aus den obigen Aequipollenzen die Punkte, welche *D*, *H*, *G*, *F* u. s. w. entsprechen. Der Punkt, welcher *D* entspricht, ist der, wo die Perpendikel sich schneiden, wir wollen ihn *V* nennen, so entspricht dem Punkte *H*, -

$$\overline{XV} \cdot \overline{YZ}.$$ u. s. w.

So hat man bald die ganze Correlation der Construction und die Anwendung der Formeln hat keine Schwierigkeiten mehr. Die Correlation der Construction liegt oft tiefer versteckt, als man glaubt, so dafs beyde Figuren gar keine Verbindung mit einander zu haben scheinen; z. B. in dem sehr einfachen Fall der Secanten des Kreises (Fig. 6, 7). Das hat denn den Nachtheil, dafs man oft aus einem einzigen Satze zwey ganz verschiedene macht.

Der Gebrauch der technischen Formeln verhindert nicht den Gebrauch der ordentlichen algebraischen, jene sind im Gegentheil bestimmt, die Anwendung dieser auf besondere Fälle zu erleichtern, wenn diese Fälle einer solchen Anwendung fähig sind. Will

man auf eine Figur eine Formel anwenden, die für eine andere derſelben Art gefunden ward, welche merklich von ihr durch ihre Modificationen unterſchieden iſt, ſo muſs man damit anfangen zu unterſuchen, welches die ſich entſprechenden Theile in beyden ſind, um ihnen dieſelben Benennungen zu geben. Der Zweck der techniſchen Formeln iſt nun, dieſe etwas ſchwierige Operation zu erleichtern. Man fängt damit an, die Buchſtaben an der Figur ſelbſt in die Formel zu ſetzen. Sind z. B. die vier Seiten eines Vierecks $ABDC$ in der Formel durch m, n, p, q und die Winkel durch r, s, t, u bezeichnet, ſo ſetzt man dafür $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$, $B\hat{A}C$, $A\hat{B}D$, $B\hat{D}C$, $D\hat{C}A$. Dann ſtellt man die Correlation der Conſtruction für ein anderes Viereck $MNPQ$ ſo dar:

$$A,\ B,\ D,\ C$$
$$M,\ N,\ P,\ Q,$$

oder wie man ſonſt will, und erkennt den Augenblick die ſich entſprechenden Quantitäten, die im neuen Syſteme durch m, n, p, q, r, s, t, u bezeichnet werden.

Einfache Figuren kann man freylich auch ohne Correlation behandeln; ſobald die Figur aber nur etwas verwickelt wird (z. B. nur ein Viereck von der 3ten Art), ſo erfordert es ſchon viel Aufmerkſamkeit, um ſich nicht zu irren. Alles wird aber leicht, wenn man die Punkte durch die Aequipollenzen auf einander zurück führt.

Eine Figur kann oft mit ſich ſelbſt, aus einem andern Geſichtspunkte betrachtet, verglichen werden,

dann vermeidet man ſelten Verwirrung, wenn ſie nur etwas verwickelt iſt, und man eine gegebene Formel auf alle Anſichten derſelben Figur, wo es möglich iſt, anwenden will. Durch techniſche Formeln wird aber alles meiſt auf eine bloſse Verwechſelung der Buchſtaben zurückgebracht, welche die Hauptpunkte der Figur bezeichnen. Man ſehe (407).

Schlieſslich will ich nur noch bemerken, daſs die techniſchen Formeln, wie die algebraiſchen ihre Umformungen haben. Dieſe Umformungen beſtehen im Verſetzen der Buchſtaben.

Wenn z. B. 4 Linien *a*, *b*, *c*, *d* ſich in einem Punkte ſchneiden, ſo hat man

$$\overline{a}\cdot\overline{b} \ddagger \overline{c}\cdot\overline{d}$$

und $$\overline{a}\cdot\overline{c} \ddagger \overline{b}\cdot\overline{d}$$

Dieſe beyden Aeqnipollenzen ſagen im Grunde daſſelbe, nemlich, daſs ſich alle Linien in einem Punkte ſchneiden. Die eine iſt alſo die Folge oder Umformung der andern: d. h. trifft man in einer Rechnung die Aequipollenz

$$\overline{a}\cdot\overline{b} \ddagger \overline{c}\cdot\overline{d}$$

ſo kann man ſchlieſsen, daſs

$$\overline{a}\cdot\overline{c} \ddagger \overline{b}\cdot\overline{d}$$

alſo

Hat man die Aequipollenz $\overline{a}\cdot\overline{b} \ddagger \overline{c}\cdot\overline{d}$ ſo kann man den dritten Buchſtaben für

den zweyten ſetzen, ohne daſs die Aequipollenz aufhöre.

Man kann hieraus die Natur der Regeln dieſes neuen analytiſchen Mechanismus und ihre Anwendung auf andere Theile der Mathematik beurtheilen.

Ende.

Abhandlung.

Ueber das Verhältnifs, das zwifchen den Entfernungen von 5, willkührlich im Raume angenommenen, Punkten befteht.

Jede ebene Figur kann in Dreyecke aufgelöft, und fo die Geometrie zweyer Dimenfionen, ftreng genommen, auf blofse ebene Trigonometrie zurückgebracht werden. Allein da man diefe Dreyecke, um fie in eine Kette zu verflechten, doch noch verbinden mufs, fo hat man fchon lange den Vortheil anerkannt, den die Betrachtung eines Punktes mehr, gewährt, d. h. wenn man das Verhältnifs zwifchen 4 willkührlich in einer Ebene angenommenen Punkten unterfucht. Eben fo ift in der Geometrie dreyer Dimenfionen die Theorie der dreyeckichten Pyramiden fundamental, da jedes Polyeder in fie zerlegt werden kann, aber da man diefe Pyramiden, von denen jede 4 Scheitelpunkte hat, doch noch verbinden mufs, fo wird man nicht ohne Nutzen, um diefe Theorie vollftändig zu machen, das Verhältnifs zwifchen den Entfernungen von 5 im Raum angenommenen Punkten betrachten. Der Entfernungen zwifchen diefen Punkten, wenn man immer 2 vergleicht, find 10, und es fällt in die Augen, dafs, wenn 9 bekannt find, die 10te beftimmt

ſeyn muſs, und in Werthen der 9 andern ausgedrückt werden kann.

Dieſe Aufgabe behandele ich hier. Um zur Auflöſung zu gelangen, muſs ich einige vorläufige Unterſuchungen anſtellen, von denen manche ſchon an und für ſich viel Intereſſe haben, z. B. die folgende:

Wenn die Kanten einer dreyeckichten Pyramide gegeben ſind, durch ſie alles, was man bey der Pyramide betrachten kann, z. B. Winkel, körperlichen Inhalt, umſchriebene Kugel u. ſ. w. zu beſtimmen.

Aus ihr flieſst die Auflöſung folgender Fundamentalaufgabe für die Geometrie dreyer Dimenſionen (eben das, was das Problem der Trigonometrie für die Geometrie zweyer Dimenſionen iſt).

Wenn von den Stücken, die zur Conſtruction einer dreyeckichten Pyramide gehören, 6 zur Beſtimmung der übrigen hinreichende gegeben ſind, dieſe übrigen zu finden.

Die weſentlichſten Anwendungen dieſes Problem's würden ein groſses Werk bilden (das ich für ſehr nützlich halte), aber ich darf mich hier nur inſofern dabey aufhalten als es nöthig iſt, um zu dem mir vorgeſteckten Ziele zu gelangen.

Mehrere der hier vereinigten Aufgaben ſind ſchon von andern aufgelöſt, vorzüglich von Euler in den Petersburger, von Lagrange in den Berliner (1773.), und von Gua in den Pariſer Memoiren (1783.); aber ich habe von allen dieſen Aufgaben nur die kleine Zahl der nöthigſten behalten, um nicht das Ganze meiner Arbeit zu unterbrechen, und ſie ſo behan-

delt, wie es meine Abſicht erforderte, die von dem Zwecke jener Geometer ganz verſchieden war. Lagrange's Abhandlung enthält die ausgedehnteſten Unterſuchungen, aber er ſucht nicht wie ich hier, den entwickelten Ausdruck aller Theile der Pyramide in Werthen der Kanten zu finden, und die allgemein oben angeführte Aufgabe zu löſen, ſondern er zeigt nur, indem er auf die Pyramide die Methode der Coordinaten und Projectionen anwendet, wie viel die Analyſis, geſchickt behandelt, vermag.

Ich habe alle meine Aufgaben durch bloſse ebene und ſphäriſche Trigonometrie aufgelöſt; doch um meine Arbeit vollſtändig zu machen, habe ich in wenig Worten gezeigt, wie dieſe Methode mit der Methode der Projectionen zuſammenhängt.

Bey dieſer Gelegenheit habe ich auf eine neue, und wie ich glaube, einfache Art, die allgemeine Aufgabe der Verwandlung der Coordinaten im Raum aufgelöſt, d. h. unter der Vorausſetzung, daſs die 6 Coordinaten (alte und neue) mit einander beliebige Winkel machen.

Um dem Gedächtniſs zu Hülfe zu kommen, ſchicke ich einige bekannte Sätze voraus.

I.

In einem gradlinigten Dreyecke, deſſen Winkel *A, B, C* ihnen gegenüberſtehende Seiten *a, b, c* ſind, hat man (I. Band p. 312 ſq.)

$$1) \ldots \cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$2) \ldots \sin A = \frac{1}{2bc} \sqrt{(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$$

3) das

3) das Perpendikel aus dem Winkel A auf die gegenüberſtehende Seite $= \frac{1}{2a} \sqrt{(2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$

4) der Flächeninhalt des Dreyecks $= \frac{1}{4} \sqrt{(2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$

5) der Radius des umſchriebenen Kreiſes $= \frac{abc}{\sqrt{(2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}}$

6) der Radius des eingeſchriebenen Kreiſes $= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{a+b+c}}$

II.

In einem ſphäriſchen Dreyecke hat man

1) $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\sin b \,.\, \sin c}$

2) $\cos a = \frac{\cos A + \cos B \,.\, \cos C}{\sin B \,.\, \sin C}$

3) der Sinus des Bogens, der ſenkrecht aus dem Winkel A auf die gegenüberſtehende Seite herabgelaſſen iſt $= \frac{1}{\sin a} \sqrt{(1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2 \cos a \,.\, \cos b \,.\, \cos c)}$

III.

Wenn 3 Winkel A, B, C zuſammen den ganzen Umkreis ausmachen, oder wenn einer, z. B. $A =$ der Summe oder der Differenz der beyden andern iſt, ſo hat man folgende Formel:

$$1 - \cos A^2 - \cos B^2 - \cos C^2 + 2 \cos A \,.\, \cos B \,.\, \cos C = 0$$

Machen die 3 Winkel einen halben Umkreis aus, ſo hat man

$$1 - \cos A^2 - \cos B^2 - \cos C^2 - 2 \cos A \,.\, \cos B \,.\, \cos C = 0$$

Machen die 3 Winkel nur einen rechten aus, so erhält man

$$1 \sin A^2 - \sin B^2 - \sin C^2 - 2 \sin A' . \sin B . \sin C = 0$$

Wegen der Bezeichnung der Winkel verweise ich auf (Th. I. p. 169 fg.).

Aufgabe I.

1. Wenn von den 6 graden Linien, die 4 in einer Ebene angenommene Punkte zu zweyen verbinden, 5 gegeben sind, die 6te in Werthen dieser 5 zu finden.

Auflösung.

(Fig. 1.) B, C, D, E seyen die 4 Punkte, und 5 von den 6 Linien $\overline{BC}, \overline{BD}, \overline{CD}, \overline{BE}, \overline{CE}, \overline{DE}$ sollen gegeben seyn.

Der Kürze wegen sey

$$\overline{BC} = m$$
$$\overline{CD} = n$$
$$\overline{BD} = p$$
$$\overline{BE} = q$$
$$\overline{CE} = r$$
$$\overline{DE} = s$$

2. Weil nun unter den 3 Winkeln $C\hat{B}D, C\hat{B}E, D\hat{B}E$ einer ist, der die Summe der beyden andern ausmacht, so hat man

$$1 - \cos C\hat{B}D^2 - \cos D\hat{B}E^2 - \cos C\hat{B}E^2 + 2 \cos C\hat{B}D . \cos C\hat{B}E . \cos D\hat{B}E = 0 \ldots (A)$$

aber wir haben auch folgende 3 Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \cos C\hat{B}D = \dfrac{m^2 + p^2 - n^2}{2mp} \\ \cos C\hat{B}E = \dfrac{m^2 + q^2 - r^2}{2mq} \\ \cos D\hat{B}E = \dfrac{p^2 + q^2 - s^2}{2pq} \end{array}\right\} \dots\dots (B)$$

Subſtituirt man dieſe Werthe zu der Gleichung (A) und reducirt, ſo erhält man folgende Formel, die der Aufgabe genug thut:

$$\left.\begin{array}{l} m^4s^2 + s^4m^2 + n^4q^2 + q^4n^2 + p^4r^2 + r^4p^2 \\ + m^2n^2p^2 + m^2q^2r^2 + n^2r^2s^2 + p^2q^2s^2 \\ - m^2n^2q^2 - m^2n^2r^2 - n^2s^2q^2 - s^2q^2m^2 \\ - m^2r^2s^2 - m^2p^2s^2 - p^2m^2r^2 - p^2s^2r^2 \\ - n^2r^2q^2 - n^2p^2q^2 - p^2q^2r^2 - p^2n^2r^2 \end{array}\right\} = 0$$

3. Dieſe Formel drückt das Verhältniſs zwiſchen den Entfernungen von 4 zu einer Ebene genommenen Punkten aus; oder was auf daſſelbe herauskommt, zwiſchen den 4 Seiten und 2 Diagonalen eines ebenen Vierecks. Sie iſt, wie man ſieht, zwiſchen den 6 Gröſsen, m, n, p, q, r, s ſymmetriſch, und da eine jede dann nur in der 2ten und 4ten Potenz vorkommt, läſst ſie ſich wie die Gleichungen vom 2ten Grade behandeln.

Aufgabe II.

4. Die Höhe einer dreyeckichten Pyramide aus ihren 6 Kanten zu finden.

Auflöſung.

Es ſey $ABCD$ (Fig. 2.) die Pyramide, A der Scheitel, $\overline{AE}$ ihre Höhe, man ſoll alſo $\overline{AE}$ in

Werthen von $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, finden.

5. Von dem Fuſse des Perpendikels ziehe ich zu den Winkeln der Grundlinie, B, C, D, die 3 Linien $\overline{EB}$, $\overline{EC}$, $\overline{ED}$, und ich bezeichne

$$\overline{AD} = f$$
$$\overline{AB} = g$$
$$\overline{AC} = h$$
$$\overline{BC} = m$$
$$\overline{CD} = n$$
$$\overline{DB} = p$$
$$\overline{EB} = q$$
$$\overline{EC} = r$$
$$\overline{ED} = s$$

6. Die geſuchte Höhe AE nenne ich x. Da ich nun für das Viereck $BCDE$ dieſelben Benennungen wie zu der vorigen Aufgabe behalten habe (Fig. 3.), ſo wird die Formel (C) dieſer Aufgabe auf den vorliegenden Fall anwendbar ſeyn. Um q, r, s zu eliminiren, haben wir die 3 Gleichungen

$$qq = gg - xx$$
$$rr = hh - xx$$
$$ss = ff - xx$$

Subſtituiren wir dieſe Werthe, ſo erhalten wir folgende Formel, die der Aufgabe Genüge leiſtet:

$$\begin{aligned}
&xx(2m^2n^2 + m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4)\\
&+ f^4m^2 + m^4f^2 + g^4n^2 + n^4g^2 + h^4p^2 + p^4h^2\\
&+ m^2n^2p^2 + m^2g^2h^2 + n^2f^2h^2 + p^2f^2g^2\\
&- m^2n^2f^2 - m^2n^2g^2 - m^2f^2g^2 - m^2f^2h^2\\
&- m^2p^2f^2 - m^2p^2h^2 - n^2f^2g^2 - n^2g^2h^2\\
&- n^2p^2g^2 - n^2p^2h^2 - p^2g^2h^2 - p^2f^2h^2 = o \;\ldots\ldots\; (A)
\end{aligned}$$

7. Da die Formel (A) die 7 Quantitäten m, n, p, f, g, h, x enthält, so sieht man, daſs sie folgende allgemeine Aufgabe auflöſt:

Wenn von den 6 Kanten und der Höhe einer dreyeckten Pyramide 6 gegeben sind, die 7te zu finden.

8. Wenn die 3 aufsteigenden Kanten f, g, h einander gleich sind, so wird die Formel

$$(ff - xx)\{2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4\} - m^2n^2p^2 = o \ldots (B)$$

was auch sonst leicht zu sehen ist, denn da

$$ff - xx = ss = rr = qq$$

weil

$$f = g = h$$

so sind s, r, q, 3 Halbmesser eines Kreises, der um die Grundfläche BCD beschrieben ist, nach dem ersten Lemma hat man

$$ss\,(2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4\} - m^2n^2p^2 = o$$

welches die Formel (B) ist.

Sollen auch die 3 Seiten der Grundfläche, m, n, p, einander gleich seyn, so wird die Formel (B)

$$xx = ff - \tfrac{1}{3}mm \ldots (C)$$

und ist $f = m$, so hat man

$$xx = \tfrac{2}{3}mm \ldots (D)$$

welches der Fall bey dem regulären Tetraëder ist.

Aufgabe II*.

Wenn die 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide gegeben ſind, den Werth einer Linie zu finden, die vom Scheitel zu irgend einem gegebenen Punkt der Grundlinie gezogen wird.

Die Entfernung des gegebenen Punktes vom Winkel B ſey p', und vom Winkel C, n'. Man hat alſo eine neue Pyramide, deren Grundfläche die Kanten m, q', r' hat, und deren aufſteigende Kanten g, h, x ſind, wo x die geſuchte Linie bedeutet. Die neue Pyramide hat einerley Höhe mit der vorigen. Berechnet man alſo ihre Höhe aus den Kanten, und ſetzt ſie der Höhe der vorigen gleich, ſo erhält man eine Endgleichung für x vom 4ten Grade, die wie eine quadratiſche aufgelöſet wird. Iſt die Höhe der Pyramide $= \xi$, und bekannt, da ſie der Höhe der vorigen gleich iſt, ſo haben wir

$$\begin{aligned}
&\xi\xi(2m^2n'^2 + 2m^2p'^2 + 2n'^2p'^2 - m^4 - n'^4 - p'^4)\\
&+ x^4m^2 + m^4x^2 + g^4n'^2 + n'^4g^2 + h^4p'^2 + p'^4h^2\\
&+ m^2n'^2p'^2 + m^2g^2h^2 + n'^2h^2x^2 + p'^2g^2x^2\\
&- m^2n'^2x^2 - m^2n'^2g^2 - m^2g^2x^2 - m^2h^2x^2\\
&- m^2p'^2x^2 - m^2p'^2h^2 - n'^2g^2x^2 - n'^2g^2h^2\\
&- n'^2p'^2g^2 - n'^2p'^2h^2 - p'^2g^2h^2 - p'^2h^2x^2 = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe III.

9. **Den körperlichen Inhalt einer dreyeckichten Pyramide in Werthen ihrer 6 Kanten zu finden.**

Es ſey (Fig. 4.) wie vorher

m, n, p, die 3 Kanten der Grundfläche;

$f, g, h,$ die 3 aufſteigenden reſpective gegenüberſtehenden Kanten;

x die Höhe der Pyramide über der Grundfläche BCD;

S der geſuchte körperliche Inhalt,

ſo haben wir

$$S = \tfrac{1}{3}x \,.\, BCD$$

Nun iſt nach Lemma 1

$$BCD = \tfrac{1}{4}\sqrt{(2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4)}$$

Subſtituirt man dieſen Werth in die erſte Gleichung quadrirt, und ſubſtituirt dann den Werth von xx aus der Formel (A) der vorigen Aufgabe, ſo erhält man folgende Formel, die der Aufgabe Gnüge leiſtet

$$\begin{aligned} 9 \,.\, 16\, SS &+ f^4m^2 + m^4f^2 + g^4n^2 + n^4g^2 + h^4p^2 + p^4h^2 \\ &+ m^2n^2p^2 + m^2g^2h^2 + n^2f^2h^2 + p^2f^2g^2 \\ &- m^2n^2f^2 - m^2n^2g^2 - m^2f^2g^2 - m^2f^2h^2 \\ &- m^2p^2f^2 - m^2p^2h^2 - n^2f^2g^2 - n^2g^2h^2 \\ &- n^2p^2g^2 - n^2p^2h^2 - p^2g^2h^2 - p^2f^2h^2 = 0 \\ &\qquad \ldots\ldots \quad (A) \end{aligned}$$

10. Weil die Formel (A) die 7 Quantitäten m, n, p, f, g, h, S enthält, ſo löſt ſie offenbar folgende allgemeinere Aufgabe auf:

Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide und ihrem körperlichen Inhalte irgend 6 gegeben ſind, das 7te zu finden.

11. Sollen die 3 aufſteigenden Kanten f, g, h gleich ſeyn, ſo wird die Formel

$$\begin{aligned} 9 \cdot 16\, SS = ff(2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4) \\ - m^2n^2p^2 \quad \ldots \quad (B) \end{aligned}$$

Sind auch die 3 Kanten der Grundfläche *m, n, p* gleich, ſo wird die Formel (B)

$$9 \cdot 16\, SS = 3ffm^4 - m^6 \;.\;.\;.\;. \qquad (C)$$

Iſt auch $f = m$, wie bey dem regulären Tetraëder, ſo hat man

$$S = \frac{1}{6\sqrt{2}} m^3 \;.\;.\;.\;. \qquad (D)$$

Aufgabe IV.

12. Den Halbmeſſer einer um die dreyeckte Pyramide beſchriebenen Kugel, in Werthen der Kanten auszudrücken.

Es ſeyen

$m, p, n,$ die 3 Kanten der Grundfläche;
$f, g, h,$ die 3 aufſteigenden Kanten;
S der körperliche Inhalt;
R der Halbmeſſer der umſchriebenen Kugel.

Stellt man ſich vom Mittelpunkte dieſer Kugel Linien in die 4 Winkel der Pyramide gezogen vor, ſo werden dieſe Linien (welches die geſuchten Halbmeſſer ſind), die Pyramide in 4 andere zerlegen, deren körperlichen Inhalt man durch die Formel (11, B) findet. Setzt man den Inhalt dieſer 4 Pyramiden dem Inhalte des ganzen gleich, den man aus (11, A) findet, ſo hat man nach Reductionen folgende Formel:

$$
\begin{aligned}
4RR\,(&f^4m^2+m^4f^2+g^4n^2+n^4g^2+h^4p^2+p^4h^2\\
&+m^2g^2h^2+p^2f^2g^2+n^2f^2h^2+m^2n^2p^2\\
&-m^2n^2g^2-n^2p^2g^2-n^2f^2g^2-m^2f^2g^2\\
&-n^2g^2h^2-p^2g^2h^2-m^2n^2f^2-m^2p^2f^2\\
&-n^2p^2h^2-m^2p^2h^2-m^2f^2h^2-p^2f^2h^2)\\
&+2n^2p^2g^2h^2+2m^2p^2f^2h^2+2m^2n^2f^2g^2\\
&-m^4f^4-g^4n^4-h^4p^4=o\;.\;.\;.\;.\qquad (A)
\end{aligned}
$$

13. Die Formel (A) löſt offenbar folgende Aufgabe auf:

Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide, und dem Halbmeſſer der umſchriebenen Kugel, irgend 6 gegeben ſind, das 7te zu finden.

14. Sind alle Kanten gleich wie bey dem regulären Tetraëder, und bezeichnet man mit m eine von ihnen, ſo iſt

$$R=m\sqrt{(\tfrac{3}{8})}\;.\;.\;.\;.\;.\;(B)$$

Aufgabe V.

15. Den Halbmeſſer der einer dreyeckten Pyramide eingeſchriebenen Kugel in Werthen der 6 Kanten zu finden.

Es ſey (Fig. 4.)

$m, n, p,$ die 3 Kanten der Grundfläche;

$f, g, h,$ die 3 aufſteigenden reſpective gegenüberſtehenden Kanten;

S der körperliche Inhalt der Pyramide;

r der geſuchte Halbmeſſer der eingeſchriebenen Kugel.

Durch Linien aus dem Mittelpunkt dieſer Kugel in die 4 Winkel der Pyramide gezogen, wird ſie in 4 kleinere zerlegt. Man hat alſo

$$S = \tfrac{1}{3} r (BCD + ABC + ABD + ACD) \;\ldots\; (A)$$

Durch das Lemma I. haben wir aber BCD, ABC, u. ſ. w., und durch Aufgabe III. (9) auch S. Subſtituiren wir dieſe Werthe, ſo entſteht

$$\begin{aligned} & r\sqrt{}(2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4) \\ & \quad + \sqrt{}(2g^2h^2 + 2g^2m^2 + 2h^2m^2 - g^4 - h^4 - m^4) \\ & + \sqrt{}(2f^2g^2 + f^2p^2 + 2g^2p^2 - f^4 - g^4 - p^4) + \sqrt{}(2f^2h^3 \\ & \quad + 2f^2n^2 + 2h^2n^2 - f^4 - h^4 - n^4) \\ & = \sqrt{}(m^2n^2f^2 + m^2n^2g^2 + m^2f^2g^2 + m^2f^2h^2 + m^2p^2f^2 \\ & \quad + m^2p^2h^2 + n^2f^2g^2 + n^2g^2h^2) \\ & + n^2p^2g^2 + n^2p^2h^2 + p^2g^2h^2 + p^2f^2h^2 - f^4m^2 - m^4f^2 \\ & \quad - g^4n^2 - n^4g^2 - h^4p^2 - p^4h^2 \\ & - m^2g^2h^2 - n^2f^2h^2 - p^2f^2g^2 - m^2n^2p^2) \;\ldots\; (B) \end{aligned}$$

16. Lagrange bemerkt, daſs es auſser der eingeſchriebenen Kugel noch 4 andere gebe, die eben ſo wohl die 4 Seitenflächen der Pyramide berühren, aber daſs dann immer eine dieſer 4 Seitenflächen äuſserlich von der Kugel berührt wird. Man kann ſo leicht den Halbmeſſer dieſer 4 neuen Kugeln finden, denn man braucht nur die Seitenfläche, welche äuſserlich von der Kugel berührt wird, als negativ zu betrachten, d. h. den Wurzelgröſsen, welche ſie ausdrücken, das Zeichen — zu geben. Will man z. B. den Halbmeſſer der Kugel finden, die innerlich die 3 Seitenflächen ABC, ABD, ACD berührt, und äuſserlich BCD, ſo braucht man nur in vorſtehender Formel (B) der Wurzelgröſse

$$\sqrt{}(2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4)$$

das Zeichen — zu geben.

17. Durch die Formel (B) wird folgende allgemeine Aufgabe gelöst:

Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide, und dem Halbmesser der eingeschriebenen Kugel 6 gegeben sind, das 7te zu finden.

18. Bey dem regulären Tetraëder hat man

$$r = m\sqrt{(\tfrac{1}{24})} \ldots . \qquad (C)$$

Aufgabe VI.

19. Die Entfernungen der Perpendikel einer dreyeckichten Pyramide, d. h. die Entfernung des Punktes, wo ein Perpendikel die Fläche, auf die es fällt, schneidet, von jedem Winkel eben dieselbe Fläche anzugeben.

Es seyen (Fig. 4.)

$m, n, p,$ die 3 Kanten der Grundfläche;

$f, g, h,$ die 3 aufsteigenden gegenüberstehenden Kanten;

x die Höhe des Scheitels A über die Fläche BCD;

$\overline{BE}$ die gesuchte Entfernung des Perpendikels,

so hat man

$$\overline{BE}^2 = gg - xx$$

Substituirt man hier den (6) gefundenen Werth von xx, so hat man folgende Formel, die der Aufgabe Gnüge thut:

$$\overline{BE}^2 \{2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4\} =$$
$$2m^2p^2g^2 + g^2m^2n^2 + g^2n^2p^2 - m^4g^2 - p^4g^2$$
$$+ f^4m^2 + m^4f^2 + g^4n^2 + p^4h^2 + h^4p^2$$
$$+ m^2n^2p^2 + m^2p^2h^2 + n^2f^2h^2 + p^2f^2g^2$$
$$- m^2n^2f^2 - m^2n^2g^2 - m^2f^2g^2 - m^2f^2h^2$$
$$- m^2p^2f^2 - m^2p^2h^2 - n^2f^2g^2 - n^2g^2h^2$$
$$- n^2p^2h^2 - p^2g^2h^2 - p^2f^2h^2 \; .\;.\;.\;.\; \quad (A)$$

20. Die Formel (A) löſt folgende allgemeine Aufgabe: Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide und einer der 12 Entfernungen der Perpendikel, 6 gegeben ſind, das 7te zu finden.

Aufgabe VII.

21. Die Entfernung des Fuſses eines Perpendikels in der dreyeckichten Pyramide, von den 3 Kanten der Fläche, auf der es ſteht, in Werthen der 6 Kanten zu finden.

Es ſeyen wie vorher (Fig. 5.)

m, n, p, die 3 Kanten der Grundfläche;

f, g, h, die 3 aufſteigenden gegenüberſtehenden Kanten;

x das Perpendikel aus A auf BCD;

$\overline{EF}$ die geſuchte Entfernung des Fuſses des Perpendikels von $\overline{BC}$.

Aus A ziehe ich $\overline{AF}$. So habe ich durch das erſte Lemma den Werth von $\overline{AF}$, die ſenkrecht auf $\overline{BC}$ ſteht, und durch die zweyte Aufgabe (6) AE oder x. Subſtituire ich dieſe Werthe von $\overline{AF}$ und x in der Gleichung

$$\overline{EF}^2 = \overline{AF}^2 - xx$$

so haben wir folgende Formel, die der Aufgabe Genüge leistet.

$$\overline{EF}^2 \{2m^2n^2+2m^2p^2+2n^2p^2-m^4-n^4-p^4\} =$$

$$\frac{1}{4mm}\{2m^2n^2+2m^2p^2+2n^2p^2-m^4-n^4-p^4\}$$
$$\{2g^2h^2+2g^2m^2+2h^2m^2-g^4-h^4-m^4\}$$
$$+m^4f^2+f^4m^2+n^4g^2+g^4n^2+p^4h^2+h^4p^2$$
$$+m^2n^2p^2+m^2g^2h^2+n^2f^2h^2+p^2f^2g^2$$
$$-m^2n^2f^2-m^2n^2g^2-m^2f^2g^2-m^2f^2h^2-m^2p^2f^2$$
$$-m^2p^2h^2$$
$$-n^2f^2g^2-n^2g^2h^2-n^2p^2g^2-p^2g^2h^2-p^2h^2f^2 \ldots\ldots \text{(A)}$$

22. Die Formel (A) löst folgende allgemeine Aufgabe:

Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide, und der Entfernung des Fusses eines der Perpendikel von den Seiten der Fläche, auf der es steht, 6 gegeben sind, das 7te zu finden.

Aufgabe VIII.

23. Die Entfernung jedes Scheitelpunkts vom Schwerpunkt der dreyeckichten Pyramide in Werthen der 6 Kanten auszudrücken.

Es seyen (Fig. 4.)

m, n, p, die 3 Kanten der Grundfläche;

f, g, h, die aufsteigenden Kanten;

y die gesuchte Entfernung des Scheitels A vom Schwerpunkt.

Nach den bekannten Lehrſätzen vom Schwerpunkt hat man

$$yy=\frac{4(ff+gg+hh)-(mm+nn+pp+ff+gg+hh)}{16}$$

oder nach Reduction

$$16yy=3(ff+gg+hh)-(mm+nn+pp) \;\ldots\; (A)$$

24. Die Formel (A) löſt die allgemeine Aufgabe: **Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide und der Entfernung eines Scheitelpunktes vom Schwerpunkt, 6 gegeben ſind, das 7te zu finden.**

Aufgabe IX.

25. **In Werthen der Kanten einer dreyeckichten Pyramide, alle Winkel, die durch dieſe Kanten zu zweyen an den Scheitelpunkten gebildet werden, auszudrücken.**

Es ſeyen (Fig. 4.)

$m, n, p,$ die 3 Kanten der Grundfläche;

$f, g, h,$ die 3 aufſteigenden Kanten;

$B\hat{A}C$ oder $\hat{gh}$ einer der geſuchten Winkel.

Da $\hat{gh}$ ein Winkel des Dreyecks ABC iſt, ſo hat man nach dem erſten Lemma, ohne daſs $f, n, p,$ den Werth mit beſtimmen,

$$\cos \hat{gh}=\frac{gg+hh-mm}{2gh} \qquad (A)$$

Eben ſo ſind die Formeln für jeden der 11 übrigen Winkel.

26. Aus der Formel (A) folgt

$$\left.\begin{array}{l} 2gh \,.\, cos\widehat{gh} = gg + hh - mm \\ 2fg \,.\, cos\widehat{fg} = ff + gg - pp \\ 2fh \,.\, cos\widehat{fh} = ff + hh - nn \end{array}\right\} \ldots (B)$$

Addirt man diese Gleichungen, so hat man

$$2gh \,.\, cos\widehat{gh} + 2fg\, cos\widehat{fg} + 2fh\, cos\widehat{fh} = 2ff + 2gg + 2hh - mm - nn - pp \ldots (C)$$

Vergleicht man diese Formel mit der der vorigen Aufgabe und zieht die eine von der andern ab, so kommt

$$16yy = ff + gg + hh + 2gh\, cos\widehat{gh} + 2fg\, cos\widehat{fg} + 2fh\, cos\widehat{fh} \ldots . (D)$$

wodurch folgende Aufgabe gelöset wird:

Wenn in einer dreyeckichten Pyramide von den 3 Kanten, die von einem Scheitelpunkt ausgehen, den 3 Winkeln, die von diesen Kanten zu zweyen gebildet werden, und der Entfernung dieses Scheitelpunktes vom Schwerpunkte 6 gegeben sind, das 7te zu finden.

Aufgabe X.

27. In Werthen der 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide den Winkel auszudrücken, der durch 2 respective gegenüberstehende Kanten gebildet wird, d. h. (weil sie nicht in einer Ebene sind) den Winkel, welchen mit einer von ihnen die Linie machen würde, die aus einem be-

liebigen Punkte der erstern parallel mit der andern gezogen ist.

Wir wollen z. B. indem wir (Fig. 4.) die vorigen Bezeichnungen beybehalten, den Winkel suchen, den g und n bilden (g und n, h und p, f und m sind die einander gegenüberstehenden Kanten), d. h. den Winkel, den eine durch den Punkt B parallel mit n gezogene Linie, mit g bildet.

Um die Figur deutlicher zu machen, wollen wir sie von neuem beschreiben (Fig. 6.) Es sey $\overline{BO}$ parallel mit $\overline{CD}$.

Wir wollen uns die Oberfläche einer Kugel vorstellen, deren Mittelpunkt in B ist, und die in den Punkten a, o, d, c, von den Linien $\overline{BA}$, $\overline{BO}$, $\overline{BD}$, $\overline{BC}$ geschnitten wird. Die Ebenen, in denen je zwey dieser Linien liegen, bilden auf der Kugeloberfläche ein sphärisches Dreyeck ado, das mit dem ersteren acd, in c einen Winkel gemein hat. Wir haben also nach dem 2ten Lemma

$$\cos a\hat{c}d = \frac{\cos ad - \cos ac \cdot \cos cd}{\sin ac \cdot \sin cd}$$

$$\cos a\hat{c}d = \frac{\cos ao - \cos ac \cdot \cos co}{\sin ac \cdot \sin co}$$

daraus

$$(\cos ao - \cos ac \cdot \cos co) \sin cd = (\cos ad - \cos ac \cdot \cos cd) \sin co \quad \ldots\ldots \text{(A)}$$

aber

$$ac = A\hat{B}C$$
$$co = O\hat{B}C = \text{suppl} \cdot B\hat{C}D$$
$$cd = C\hat{B}D$$
$$ad = A\hat{B}D$$

Nun

Nun ſind alle dieſe Winkel bekannt und leicht in Werthen der Kanten auszudrücken, es iſt alſo in der Gleichung (A) nichts unbekannt als der geſuchte Bogen *ao* das Maaſs des geſuchten Winkels $\overline{BA}\hat{\ }\overline{CD}$

Die vorige Gleichung wird folglich

$$(\cos g\hat{\ }n + \cos A\hat{B}C \,.\, \cos B\hat{C}D)\ \sin C\hat{B}D = (\cos A\hat{B}D - \cos A\hat{B}C : \cos C\hat{B}D)\ \sin B\hat{C}D \ldots. \quad (B)$$

Da wir aber $g\hat{\ }n$ in Werthen der Kanten haben wollen, ſo drücken wir darin $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$ u. ſ. w. vermöge des erſten Lemma aus.

Es iſt alſo (Fig. 3.)

$$\cos A\hat{B}C = \frac{gg + mm - hh}{2gm}$$

$$\cos B\hat{C}D = \frac{mm + nn - pp}{2mn}$$

$$\sin B\hat{C}D = \frac{1}{2mn}\sqrt{\{2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4\}}$$

$$\cos A\hat{B}D = \frac{gg + pp - ff}{2gp}$$

$$\cos C\hat{B}D = \frac{mm + pp - nn}{2mp}$$

$$\sin C\hat{B}D = \frac{1}{2mp}\sqrt{\{2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4\}}$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in (B), ſo erhalten wir folgende Formel:

$$2gn \cos g\hat{\ }n = hh + pp - ff - mm \ldots. \quad (C)$$

28. Die Formel löſet folgende allgemeinere Aufgabe: Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide, und einem der 3 Winkel, welche durch die gegenüberſtehenden Kanten gebildet werden, 6 gegeben ſind, das 7te zu finden.

29. Wendet man die Formel auf die andern gegenüberſtehenden Kanten m, f, und p, h an, ſo hat man folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} 2gn \,.\, \cos g^\wedge n = hh + pp - ff - mm \\ 2fm \,.\, \cos f^\wedge m = gg + nn - hh - pp \\ 2hp \,.\, \cos h^\wedge p = ff + mm - gg - nn \end{array}\right\} \ldots\ldots \text{(D)}$$

Addirt man, ſo entſteht folgende merkwürdige ſymmetriſche Formel:

$$fm \,.\, \cos f^\wedge m + gn \,.\, \cos g^\wedge n + hp \,.\, \cos h^\wedge p = o \ldots\ldots \text{(E)}$$

30. Man kann noch bemerken, daſs, wenn man die Höhe der Pyramide $= o$ ſetzt, ſie zu einem ebenen Viereck wird, auf das auch die Formeln anwendbar ſind (Fig. 3.). Sie werden dann

$$\left.\begin{array}{l} 2ms \,.\, \cos m^\wedge s = qq + nn - rr - pp \\ 2nq \,.\, \cos n^\wedge q = rr + pp - ss - mm \\ 2pr \,.\, \cos p^\wedge r = ss + mm - qq - nn \end{array}\right\} \ldots\ldots \text{(F)}$$

Hier giebt die letzte Formel, z. B. die Auflöſung der Aufgabe:

> Wenn die 4 Seiten eines ebenen Vierecks, und der Winkel zwiſchen beyden Diagonalen gegeben iſt, dieſe beyden Diagonalen zu finden;

man braucht ſie nur mit der Formel (C) der Aufgabe I. (5) zu verbinden.

Eben ſo würde man dieſe Aufgabe löſen:

> Wenn man den Inhalt eines ebenen Vierecks und ſeine 4 Seiten kennt, die beyden Diagonalen zu finden.

Nennen wir den Inhalt a, ſo haben wir bekanntlich

$$\tfrac{1}{2}pr \,.\, \sin p^\wedge r = a$$

Dividirt man diese Formel durch die letzte der Formeln (F), so kommt

$$\text{cotang}\, p\hat{}r = \frac{ss + mm - qq - nn}{4aa}$$

Da man nun den Winkel $p\hat{}r$ kennt, so kommt die Aufgabe auf die erste zurück.

Aufgabe XI.

31. **In Werthen der 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide alle Winkel auszudrücken, die durch zwey Seitenflächen gebildet werden.**

Es seyen wie vorher (Fig. 5.)

$m, n, p,$ die 3 Kanten der Grundfläche;

$f, g, h,$ die 3 gegenüberstehenden aufsteigenden Kanten;

x die Höhe des Scheitels A über der Grundfläche BCD.

$A\hat{F}E$ ist offenbar der Winkel, den die Seitenflächen ABC, BCD, deren Durchschnitt $\overline{BC}$ ist, mit einander bilden.

Man hat

$$\overline{AF} \,.\, \sin A\hat{F}E = x$$

Die Aufgabe II. (6) giebt x, das erste Lemma AF, substituirt man also ihre Werthe, so entsteht folgende Formel:

$$\begin{aligned}
\sin A\hat{F}E \{ & 2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4\} \\
& \{2g^2h^2 + 2g^2m^2 + 2h^2m^2 - g^4 - h^4 - m^4\} \\
+ 4m^2 \{ & m^4f^2 + f^4m^2 + n^4g^2 + g^4n^2 + p^4h^2 + h^4p^2 \\
& + m^2n^2p^2 \\
& + m^2g^2h^2 + n^2f^2h^2 + p^2f^2g^2 - m^2n^2f^2 - m^2n^2g^2 \\
& - m^2f^2g^2 - m^2f^2h^2 \\
& - m^2p^2f^2 - m^2p^2h^2 - n^2f^2g^2 - n^2g^2h^2 - n^2p^2g^2 \\
& - n^2p^2h - p^2g^2h^2 - p^2f^2h^2\} = 0 \;\ldots\; (A)
\end{aligned}$$

32. Diese Formel löset folgende allgemeinere Aufgabe:

Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide, und dem Winkel, den 2 Seitenflächen bilden, 6 gegeben sind, das 7te zu finden.

Aufgabe XII.

33. In Werthen der 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide die 12 Neigungswinkel dieser Kanten auf den Seitenflächen auszudrücken.

Ich behalte die Benennungen der vorigen Aufgabe und suche z. B. den Winkel $A\hat{B}E$ (Fig. 5.), welches der Neigungswinkel der Kante $\overline{AB}$ auf der Seitenfläche BCD ist.

Substituirt man in

$$g \cdot \sin A\hat{B}E = x$$

für x den Werth, den die Formel (A) der Aufgabe II. (6) giebt, so entsteht folgende Formel:

$$\begin{aligned}\sin A\hat{B}E^2 \cdot gg\{2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4\}\\ + m^4f^2 + f^4m^2 + n^4g^2 + g^4n^2 + p^4h^2 + h^4p^2\\ + m^2n^2p^2 + m^2g^2h^2 + n^2f^2h^2 + p^2g^2f^2\\ - m^2n^2f^2 - m^2n^2g^2 - m^2g^2f^2 - m^2h^2f^2\\ - m^2p^2f^2 - m^2p^2h^2 - n^2g^2f^2 - n^2g^2h^2\\ - n^2p^2g^2 - n^2p^2h^2 - p^2g^2h^2 - p^2h^2f^2 = o \ldots (A)\end{aligned}$$

34. Die Formel löset folgende allgemeinere Aufgabe:

Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide und dem Neigungs-

winkel einer Kante auf einer Seitenfläche, die ſie trifft, 6 gegeben ſind, das 7te zu finden.

Aufgabe XIII.

35. In Werthen der 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide die 12 Winkel auszudrücken, welche dieſe Kanten mit den anliegenden Perpendikeln bilden.

Wir behalten die vorigen Benennungen, und ſuchen z. B. den Winkel $B\hat{A}E$, welchen die Kante $\overline{AB}$ mit dem anliegenden Perpendikel $\overline{AE}$ bildet.

Subſtituirt man in

$$g \cdot \cos B\hat{A}E = x$$

für x den in der Formel (A) der Aufgabe (II, 6) gefundenen Werth, ſo entſteht folgende Formel:

$$\begin{aligned} \cos B\hat{A}E \cdot gg\{2m^2n^2+2m^2p^2+2n^2p^2-m^4-n^4-p^4\} \\ +m^4f^2+f^4m^2+n^4g^2+g^4n^2+p^4h^2+h^4p^2 \\ +m^2n^2p^2+m^2g^2h^2+n^2h^2f^2+p^2g^2f^2 \\ -m^2n^2f^2-m^2n^2g^2-m^2g^2f^2-m^2h^2f^2 \\ -m^2p^2f^2-m^2p^2h^2-n^2g^2f^2-n^2g^2h^2 \\ -n^2p^2g^2-n^2p^2h^2-p^2g^2h^2-p^2h^2f^2=0 \ldots (A) \end{aligned}$$

36. Die Formel (A) löſet folgende allgemeinere Aufgabe:

Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide und einem der 12 Winkel, den dieſe Kanten mit den anliegenden Perpendikeln machen, 6 gegeben ſind, das 7te zu finden.

Aufgabe XIV.

37. In Werthen der 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide die Winkel auszudrücken, welche jedes Perpendikel mit den anliegenden Seiten macht.

Wir behalten die vorigen Bezeichnungen, und suchen z. B. die Winkel $F\hat{A}E$, den das Perpendikel $\overline{AE}$ mit der Seitenfläche ABC macht.

Offenbar ist

$$\overline{AF} \cdot \cos F\hat{A}E = \overline{AE}$$

Substituirt man hier für $\overline{AE}$ den Werth aus der Gleichung (A) der Aufgabe (II, 6) und für $\overline{AF}$ den aus dem ersten Lemma gezogenen Werth, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \cos F\hat{A}E \{2g^2h^2 + 2g^2m^2 + 2h^2m^2 - g^4 - h^4 - m^4\} \\ \{2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4\} \\ + 4mm\,(m^4f^2 + f^4m^2 + n^4g^2 + g^4n^2 + p^4h^2 + h^4p^2) \\ + m^2n^2p^2 + m^2g^2h^2 + n^2h^2f^2 + p^2g^2f^2 \\ - m^2n^2f^2 - m^2n^2g^2 - m^2g^2f^2 - m^2h^2f^2 \\ - m^2p^2f^2 - m^2p^2h^2 - n^2g^2f^2 - n^2g^2h^2 \\ - n^2p^2g^2 - n^2p^2h^2 - p^2g^2h^2 - p^2h^2f^2 = o \;\ldots\ldots\; \text{(A)} \end{aligned}$$

38. Die Formel löset folgende allgemeinere Aufgabe:

Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide, und einem der 12 Winkel, welche die Perpendikel und die anliegenden Seiten bilden, 6 gegeben sind, das 7te zu finden.

Aufgabe XV.

39. In Werthen der 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide alle Winkel auszudrücken, welche von den Entfernungen der Perpendikel (siehe 19.) gebildet werden.

Wir behalten die vorigen Benennungen und suchen z. B. den Winkel $B\hat{E}C$, den die beyden Entfernungen der Perpendikel (Fig. 5.), $\overline{EB}$, $\overline{EC}$, bilden. Das erste Lemma giebt

$$\cos B\hat{E}C = \frac{\overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 - \overline{BC}^2}{2 \,.\, \overline{BE} \,.\, \overline{CE}}$$

aber man hat

$$\overline{BE}^2 = gg - xx$$
$$\overline{CE}^2 = hh - xx$$
$$\overline{BC}^2 = m$$

also wird die vorige Gleichung

$$\cos B\hat{E}C = \frac{gg + hh - mm - 2xx}{2\sqrt{(gg - xx)(hh - xx)}} \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

eine Formel, worin man nur für x noch den Werth aus der Formel (A) der Aufgabe (II, 6) zu substituiren braucht.

40. Die Formel löset die allgemeinere Aufgabe: Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide, und dem Winkel, den 2 Entfernungen der Perpendikel machen, 6 gegeben sind, das 7te zu finden.

Aufgabe XVI.

41. In Werthen der 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide, die kürzeste Entfernung zweyer gegenüberstehenden Kanten, d. h. die Linie zu finden, die auf beyden senkrecht steht.

Ich behalte die Benennungen der vorigen Aufgaben, und suche z. B. die kürzeste Entfernung von g nach n (Fig. 6.).

Weil nach der Annahme $\overline{BO}$ parallel mit $\overline{CD}$ ist, so wird die Ebene ABO auch derselben Linie parallel seyn, und die gesuchte Entfernung ist folglich dieselbe, als die Entfernung irgend eines Punktes der Linie CD z. B. C, von der Ebene ABO.

Senke ich nun vom Punkte C, das Perpendikel $\overline{Cu}$ auf $\overline{BO}$, und ziehe $\overline{Au}$, so ist $CBAu$ eine dreyeckichte Pyramide, und die gesuchte Entfernung ist, wenn wir ABu als Grundfläche annehmen, die Höhe dieser Pyramide, man braucht also nur die 6 Kanten der Pyramide $CBAu$ durch die 6 Kanten der Pyramide $ABCD$ auszudrücken, so giebt die Formel (6) uns die gesuchte Höhe.

Unter den Kanten der Pyramide $CBAu$ sind $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ schon bekannt, und es ist

$$\overline{Cu} = \overline{BC} \,.\, \sin C\hat{B}O = \overline{BC} \,.\, \sin B\hat{C}D$$

$$\overline{Bu} = -\overline{BC} \,.\, \cos B\hat{C}D$$

$$\overline{Au}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{Bu}^2 - 2\overline{AB} \,.\, \overline{Bu} \,.\, \cos A\hat{B}u.$$

Da nun $A\hat{B}u = g\hat{\ }n$ dem Winkel, der in der vorigen Aufgabe gefunden ward, so ist alles bekannt, und

wir erhalten (Fig. 5 und 6.) die 6 Kanten der neuen Pyramide in Werthen der ersten

$$\left.\begin{array}{l}
\overline{AB} = g \\
\overline{AC} = h \\
\overline{BC} = m \\
\overline{Bu} = \frac{1}{2n}(pp - mm - nn) \\
\overline{Cu} = \frac{1}{2n}\sqrt{(2m^2n^2 + 2m^2p^2 + 2n^2p^2 - m^4 - n^4 - p^4)} \\
\overline{Au} = \frac{1}{2n}\sqrt{\{n^4 - m^4 - p^4 + 4g^2n^2 + 2m^2p^2 + 2h^2m^2 + 2h^2n^2 + 2f^2p^2 - 2k^2m^2 - 2f^2n^2 - 2h^2p^2\}}
\end{array}\right\} \ldots . (A)$$

Um nun die Formel (6) auf den gegenwärtigen Fall anzuwenden, muſs man für

$m \ldots . \overline{AB}$

$n \ldots . \overline{Bu}$

$p \ldots . \overline{Au}$

$f \ldots . \overline{Cu}$

$g \ldots . \overline{AC}$

$h \ldots . \overline{BC}$

ſetzen, dann giebt x durch eine quadratiſche Gleichung ohne zweytes Glied die geſuchte Entfernung.

42. Die ſo gefundene Formel löſet die allgemeinere Aufgabe:

Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide, und der Entfernung zweyer gegenüberſtehenden Kanten, 6 gegeben ſind, das 7te zu finden.

Aufgabe XVII.

43. In Werthen der 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide den Winkel auszudrücken, welchen 2 Halbmeſſer der umſchriebenen Kugel bilden, die man zu den Endpunkten einer Kante zieht.

Ich behalte die vorigen Benennungen und ſuche z. B. den Winkel, den die Halbmeſſer bilden, die durch *B*, *C*, gehen (Fig. 4.).

Der geſuchte Winkel heiſse m', ſo haben wir

$$\cos m' = \frac{2RR - mm}{2RR},$$

oder

$$2(1 - \cos m')\, RR = mm \;.\;.\;.\;.\;. (A)$$

Subſtituiren wir hier den Werth von R aus der Formel (A) der Aufgabe (IV, 10), ſo haben wir

$$\begin{aligned}(1-\cos m')\,\{ & g^4n^4 + f^4m^4 + h^4p^4 - 2g^2h^2n^2p^2 \\ & - f^2h^2m^2p^2 - 2f^2g^2m^2n^2\} \\ = 2mm(& g^4n^2 + n^4g^2 + f^4m^2 + m^4f^2 + h^4p^2 + p^4h^2 \\ & - g^2m^2n^2 - g^2n^2p^2 - g^2f^2m^2 - g^2h^2n^2 - g^2h^2p^2 \\ & - f^2m^2n^2 - f^2m^2p^2 - h^2n^2p^2 - f^2h^2m^2 - f^2h^2p^2) \\ & \;.\;.\;.\;. (B)\end{aligned}$$

44. Die Formel löſet folgende allgemeinere Aufgabe:

Wenn von den 6 Kanten einer dreyeckichten Pyramide und irgend einem der Winkel, den die zu den Endpunkten einer Kante gezogenen Halbmeſſer der umſchriebenen Kugel bilden 6 gegeben ſind, das 7te zu finden.

Aufgabe XVIII.

45. Wenn von allen Quantitäten, die bey der Conſtruction einer dreyeckichten Pyramide vorkommen, 6 gegeben ſind, die die übrigen beſtimmen, dieſe übrigen zu finden.

Zu denen, die die übrigen nicht beſtimmen, gehören z. B. die 6 Winkel, oder 4 Quantitäten, die zu einem Dreyecke gehören.

Sind es aber ſolche, die den Reſt beſtimmen, ſo ſuche man ihren Werth aus den vorigen Formeln durch die Kanten auszudrücken, und ziehe dann in gegebenen Gröſsen den Werth jeder Kante aus dieſen Gleichungen, welche Werthe man in die Formeln für jede Quantität, die zur Conſtruction der Pyramide gehört, ſubſtituirt.

46. Sucht man nur das Verhältniſs, das zwiſchen den Winkeln der Pyramide beſteht, ſo ſind 5 genug, um die übrigen zu finden.

So wie wir alle Theile der Pyramide durch die Kanten ausgedrückt haben, könnten wir auch alle ihre Winkel in Werthen der 6 Winkel ausdrücken, welche je zwei Seitenflächen bilden, wenn wir vorher die Bedingungsgleichung aufſtellen, die dieſe 6 Quantitäten unter einander verbindet, da 5 von ihnen genug ſind, den 6ten zu beſtimmen.

47. Man könnte zu dieſer Beſtimmung auch 6 andere Winkel nehmen, z. B. die Winkel, welche zwey Halbmeſſer der umſchriebenen Kugel, die durch die Endpunkte einer Kante gehen, machen, wenn man

nur eben so vorher hier die Bedingungsgleichung aufstellt, die diese Winkel unter einander verbindet.

Diese Bedingungsgleichung ist leicht zu finden. Bezeichnen wir diese Winkel mit m', n', p', g', h', f', wie in der XVII. Aufgabe, so haben wir

$$\left.\begin{aligned} mm &= 2RR\,(1 - \cos m') \\ nn &= 2RR\,(1 - \cos n') \\ pp &= 2RR\,(1 - \cos p') \\ gg &= 2RR\,(1 - \cos g') \\ hh &= 2RR\,(1 - \cos h') \\ ff &= 2RR\,(1 - \cos f') \end{aligned}\right\} \;\ldots\; (\mathrm{B})$$

Substituirt man also in allen vorher gefundenen Formeln für mm, nn, pp, u. s. w. diese Werthe, so hat man alle Quantitäten des Systems, durch den Halbmesser R der umschriebenen Kugel, und die Winkel m', n', u. s. w. ausgedrückt. Da diess aber 7 Quantitäten sind, und nur 6 nöthig sind, so muss man einen der Winkel durch die Bedingungsgleichung verschwinden lassen, die wir suchen wollen.

Setzt man in die Formel (A) der Aufgabe (IV, 12) die hier gefundenen Werthe für mm, nn, u. s. w. so ist die Gleichung durch R^8 zu dividiren, man kann also nur $R = 1$ setzen, um die Bedingungsgleichung zu erhalten.

$$\begin{aligned} &1 - \cos m'^2 - \cos n'^2 - \cos p'^2 - \cos f'^2 - \cos g'^2 - \cos h'^2 \\ &+ \cos m'^2 \,.\, \cos f'^2 + \cos n'^2 \,.\, \cos g'^2 + \cos p'^2 \,.\, \cos h'^2 + \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\; (\mathrm{C}) \\ &+ 2\cos m' \cos n' \cos p' + 2\cos m' \cos g' \cos h' \\ &\qquad + 2\cos n' \cos h' \cos f' + 2\cos g' \cos h' \cos f' \\ &- 2\cos m' \cos n' \cos f' \cos g' - 2\cos m' \cos f' \cos p' \cos h' \\ &\qquad - 2\cos n' \cos g' \cos p' \cos h' = 0 \end{aligned}$$

Diefs ift die Bedingungsgleichung, vermittelft der man mit den Gleichungen (B) alle Quantitäten des Syftems in Werthen von R und 5 der Winkel m', n', p', f', g', h' ausdrücken kann.

Ehe wir an die Hauptunterfuchung diefer Abhandlung kommen, wollen wir uns noch mit dem Verhältnifs der Winkel befchäftigen.

Aufgabe XIX.

48. Wenn von 6 Bögen gröfster Kreife, die zu zweyen 4 Punkte auf der Oberfläche einer Kugel vereinigen, 5 gegeben find, den 6ten zu finden.

Es feyen B, C, D, E (Fig. 5.) die 4 Punkte auf der Oberfläche der Kugel, BC, BD, BE, CD, CE, DE die 6 Bögen gröfster Kreife, die diefe Punkte zu zweyen verbinden, fo entfteht im fphärifchen Viereck $BCDE$, deffen 4 Seiten BC, CD, DE, BE, und die Diagonalen BD, CE find. Man foll das Verhältnifs zwifchen Seiten und Diagonalen finden.

Entgegengefetzte Bögen nenne ich die, welche keine gemeinfchaftliche Endpunkte haben, fo find entgegengefetzt

BC, DE
CD, BE
BD, CE

Von den 3 Bogen BC, CD, BD, welche das fphärifche Dreyeck BCD bilden, find keine entgegengefetzt, aber fie find alle refpective den Bögen s, q, r entgegengefetzt, die vom 4ten Winkel E ausgehen.

Eben das hat bey den andern Dreyecken *BED, CBE, CDE* ſtatt.

Zieht man aus dem Mittelpunkte *A* (Fig. 6.) der Kugel, auf deren Oberfläche das Viereck beſchrieben iſt, Halbmeſſer zu den 4 Winkeln *B*, *C*, *D*, *E*, ſo ſind die Halbmeſſer, welche einen Bogen umfaſſen, von denen verſchieden, die den entgegengeſetzten Bogen umfaſſen; hingegen wenn die Bogen nicht entgegengeſetzt ſind, ſo iſt unter den Halbmeſſern einer, der 2 Bogen zugehört. Man ſieht, daſs dieſe 4 Halbmeſſer die 4 Kanten einer viereckichten Pyramide bilden, in der wir entgegengeſetzt die Seitenflächen nennen, wovon jede von zwey andern Halbmeſſern umfaſst wird. So ſind am Scheitel einer viereckichten Pyramide *ABCDE* 6 entgegengeſetzte Seitenflächen:

ABC, *ADE*
ACD, *ABE*
ABD, *ACE*

Wir eilen zur Sache. Es ſeyen in dem Viereck *BCDE* (Fig. 7.)

$m = BC$, $n = CD$, $p = BD$ } der 3 Bögen eines der 4 Dreyecke, die ihre Scheitel in den Winkeln des Vierecks haben;

$s = ED$, $q = EB$, $r = EC$ } die 3 den erſten entgegengeſetzten Bogen.

Das 3te Lemma giebt folgende Gleichung:

$$1 - \cos C\hat{B}E^2 - \cos C\hat{B}D^2 - \cos B\hat{D}E^2 + 2\cos C\hat{B}E \,.\, \cos C\hat{B}D \cos D\hat{B}E = 0 \;.\;.\;.\; \text{(A)}$$

eben ſo haben wir durch das vorhergehende Lemma

$$\left.\begin{aligned} \cos C\hat{B}E &= \frac{\cos r - \cos m \cdot \cos q}{\sin m \cdot \sin q} \\ \cos C\hat{B}D &= \frac{\cos n - \cos m \cdot \cos p}{\sin m \cdot \sin p} \\ \cos D\hat{B}E &= \frac{\cos s - \cos p \cdot \cos q}{\sin p \cdot \sin q} \end{aligned}\right\} \ldots \text{(B)}$$

Subſtituiren wir die Werthe in (A),

ſo kommt

$$\begin{aligned} &\sin m^2 \sin p^2 \cdot \sin q^2 - \sin p^2 (\cos r - \cos m \cdot \cos q)^2 \\ &- \sin q^2 (\cos n - \cos m \cos p)^2 - \sin m^2 (\cos s \\ &\qquad - \cos p \cdot \cos q)^2 \\ &+ 2 (\cos r - \cos m \cos q)(\cos n - \cos m \cos p) \\ &\qquad (\cos s - \cos p \cdot \cos q) = o \ldots \text{(C)} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &1 - \cos m^2 - \cos n^2 - \cos p^2 - \cos q^2 - \cos r^2 - \cos s^2 \\ &+ \cos m^2 \cdot \cos s^2 + \cos n^2 \cdot \cos q^2 + \cos p^2 \cdot \cos r^2 \\ &+ 2 \cos m \cos n \cdot \cos p + 2 \cos m \cdot \cos q \cdot \cos r \\ &+ 2 \cos n \cdot \cos r \cdot \cos s + 2 \cos p \cdot \cos s \cdot \cos s \\ &- 2 \cos m \cos n \cdot \cos q \cdot \cos s - 2 \cos m \cdot \cos p \cdot \\ &\qquad \cos r \cdot \cos s \\ &- 2 \cos n \cdot \cos p \cdot \cos q \cdot \cos r = o \ldots \text{(D)} \end{aligned}$$

Dieſe Formel enthält nur Coſinus, die nicht höher als in der zweyten Potenz vorkommen, die Gleichung alſo für die Unbekannte kann nur vom 2ten Grade ſeyn. Sie iſt übrigens mit der Formel (47) einerley, wie das auch ſeyn muſs.

Aufgabe XX.

49. Wenn von den 6 Winkeln, welche von 2 der 4 Kanten, die vom Scheitel einer

viereckichten Pyramide ausgehen, gebildet werden, 5 gegeben find, den 6ten zu finden.

Es fey (Fig. 8.) A der Scheitel, $BCDE$ die Grundfläche, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, die 4 Kanten, welche vom Scheitel ausgehen.

Wir wollen A als den Mittelpunkt einer Kugel annehmen, deren Oberfläche in B', C', D', E', von den 4 Kanten gefchnitten werden. Verbinden wir diefe Punkte durch Bogen gröfster Kreife, fo entfteht daraus ein fphärifches Viereck $B'C'D'E'$, deffen 4 Seiten und 2 Diagonalen gerade das Maafs der gefuchten Winkel find. Setzen wir alfo

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = m$$

$$\overline{AC} \wedge \overline{AD} = n$$

$$\overline{AB} \wedge \overline{AD} = p$$

$$\overline{AE} \wedge \overline{AD} = s$$

$$\overline{AE} \wedge \overline{AB} = q$$

$$\overline{AC} \wedge \overline{AE} = r$$

fo haben wir eine Formel (A), die ganz identifch mit der Formel (48. D) ift. Man mufs nur nicht vergeffen, dafs die Winkel s, q, r, refpective den Winkeln m, n, p gegenüberftehn.

Aufgabe XXI.

50. Wenn von den 6 Winkeln, welche von 4 Linien, die durch einen beliebigen Punkt im Raum gezogen find, gebildet werden, 5 gegeben find, den 6ten zu finden.

Man

Man kann diese 4 Linien als 4 Kanten einer viereckichten Pyramide betrachten. Bezeichnet man sie also (Fig. 8.) mit f, g, h, l, und ist

$$\hat{gh} = m$$
$$\hat{hf} = n$$
$$\hat{fg} = p$$
$$\hat{fl} = s$$
$$\hat{gl} = q$$
$$\hat{hl} = r$$

so erhalten wir eine Formel (A), die ganz mit der Formel (48, D) identisch ist.

Es sey $ABCD$ (Fig. 8*) die Projection eines Vierecks, das nicht in einer Ebene liegt, und m, n, q, s, p, r, die 6 Winkel, welche von den Seiten dieses Vierecks gebildet werden, wo $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ und $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ die gegenüberstehenden Seiten sind, so dass

m, der Winkel ist, den die Seiten bilden, deren Projectionen $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ sind;

s, der Winkel zwischen den respective gegenüberstehenden Seiten;

n, der Winkel zwischen den Seiten, deren Projection $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ ist;

q, der Winkel zwischen den respective gegenüberstehenden Seiten;

r, der Winkel zwischen den Zeiten, deren Projection $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ ist, oder vielmehr weil diese Linien nicht in einer Ebene sind, der Winkel zwischen $\overline{AB}$ und einer Linie, die durch einen Punkt von $\overline{AB}$ parallel mit $\overline{CD}$ gezogen ist.

Jetzt wollen wir durch irgend einen Winkel des Vierecks, z. B. durch den, dessen Projection D ist, zwey Linien DF', DE' respective mit $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ parallel ziehen, und die 4 Richtungen $\overline{DA'}$, $\overline{DC'}$, $\overline{DE'}$, $\overline{DF'}$, die vom Punkte D abgerechnet werden, mit g, l, f, k bezeichnen, so hat man offenbar

$$\widehat{gh} = m$$
$$\widehat{hf} = n$$
$$\widehat{gl} = q$$
$$\widehat{fl} = s$$
$$\widehat{fg} = \text{suppl. } p$$
$$\widehat{hl} = \text{suppl. } r.$$

Da nun g, h, f, l von einem Punkte ausgehen, so ist die vorige Formel auf diese 6 Winkel anwendbar, und man erhält, weil

$$\cos 180° - p = - \cos p$$
$$\cos 180° - r = - \cos r$$

folgende Formel, die das Verhältniss ausdrückt, welches zwischen den 6 Winkeln besteht, die von den 4 Seiten eines Vierecks, das nicht in einer Ebene liegt, gebildet werden.

$$\begin{aligned} 1 &- \cos m^2 - \cos n^2 - \cos p^2 - \cos q^2 - \cos r^2 - \cos s^2 \\ &+ \cos m^2 \cos s^2 + \cos n^2 \cos q^2 + \cos p^2 . \cos r^2 \\ &- 2 \cos m . \cos n . \cos p - 2 \cos m . \cos q . \cos r \\ &- 2 \cos n . \cos r . \cos s - 2 \cos p . \cos q . \cos s \\ &- 2 \cos m . \cos n . \cos q . \cos s - 2 \cos m . \cos p . \cos r . \cos s \\ &- 2 \cos n . \cos p . \cos q . \cos r = 0 \ldots\ldots \text{(B)} \end{aligned}$$

Aufgabe XXII.

51. Wenn von den 6 Winkeln, welche die 4 Seitenflächen einer dreyeckichten Pyramide bilden, 5 gegeben find, den 6ten zu finden.

Aus einem Punkte innerhalb der Pyramide wollen wir ein Perpendikel auf jede Seitenfläche fenken. Man fieht leicht, dafs diefe Perpendikel Winkel bilden werden, die die Supplemente der Winkel der Seitenflächen find, auf die fie fallen.

Bezeichnen wir alfo die 4 Seitenflächen mit F, G, H, L und ift

$$\hat{GH} = m$$
$$\hat{HF} = n$$
$$\hat{FG} = p$$
$$\hat{FL} = s$$
$$\hat{GL} = q$$
$$\hat{HL} = r$$

fo brauchen wir in der vorher gefundenen Formel nur die Zeichen der Cofinus zu ändern, wodurch fie felbft aber nicht verändert wird.

Aufgabe XXIII.

52. Von den 6 Winkeln, welche die 4 Seiten eines fphärifchen Vierecks bilden, die man bis zum Zufammenftofsen verlängert, find 5 gegeben, man fucht den 6ten.

Es fey (Fig. 9.) $ABCD$ das gegebene fphärifche Viereck, wir wollen die gegenüberftehenden Seiten

BA, CD, und *AD, BC* verlängern, bis ſie ſich in *F*, und *E* ſchneiden, ſo ſind die 6 Winkel $B\hat{A}D$, $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$, $C\hat{A}D$, $A\hat{F}D$, $A\hat{E}D$.

Aus dem Mittelpunkt der Kugel wollen wir Halbmeſſer zu den Punkten *A, B, C, D, E, F*, ziehen, und durch je zwey von ihnen Ebenen legen, die die Oberfläche der Kugel in Bögen gröſster Kreiſe $\overset{\frown}{BAF}$, $\overset{\frown}{CDF}$, *ADE*, *BCE* ſchneiden.

Dann wollen wir aus einem Punkte des Raumes *K* eine ſenkrechte Linie auf jede Seitenfläche ſenken, ſo erhalten wir die Perpendikel $\overline{Kt}$, $\overline{Ku}$, $\overline{Kv}$, $\overline{Kx}$. Die Winkel dieſer Perpendikel ſind die Supplemente der Winkel der Flächen, d. h. wenn π den Quadranten bedeutet, ſo haben wir

$$u\hat{K}t = 2\pi - AB\hat{\ }AD$$
$$u\hat{K}v = 2\pi - BA\hat{\ }BC$$
$$t\hat{K}v = 2\pi - ED\hat{\ }EC$$
$$v\hat{K}x = 2\pi - CB\hat{\ }CD$$
$$t\hat{K}x = 2\pi - DA\hat{\ }DC$$
$$u\hat{K}x = 2\pi - FA\hat{\ }FD$$

Die Formel (50) iſt aber auf die Winkel $u\hat{K}t$, $u\hat{K}v$, $t\hat{K}v$, $u\hat{K}x$, $t\hat{K}x$, $u\hat{K}x$ anwendbar, welche von den 4 Linien, die vom Punkte *K* ausgehen, gebildet werden, man braucht alſo nur die Zeichen der Coſinus zu verändern, um ſie auf $AB\hat{\ }AD$ u. ſ. w. anzuwenden.

Nennt man alſo

$$AB\hat{}AD = m$$
$$BA\hat{}BC = n$$
$$ED\hat{}EC = p$$
$$CB\hat{}CD = s$$
$$DA\hat{}DC = q$$
$$FA\hat{}FD = r$$

ſo erhält man eine Formel, die vollkommen mit (50, B) identiſch iſt.

53 Offenbar läſst ſich dieſelbe Formel auf die 6 Winkel anwenden, welche von den 4 Seitenflächen einer viereckichten Pyramide gebildet werden, deren Scheitelpunkt im Mittelpunkt der Kugel iſt, auf deren Oberfläche das ſphäriſche Viereck *BCDE* beſchrieben iſt, und deren 4 Kanten dieſe Oberfläche in *B*, *C*, *D*, *E* ſchneiden.

Aufgabe XXIV.

54. Wenn von den 5 Winkeln, welche die Kanten einer dreyeckichten Pyramide, die ſich im Scheitel vereinigen, bilden, und den 3 andern Winkeln, welche dieſe Kanten mit der Grundfläche der Pyramide bilden, 5 gegeben ſind, den 6ten zu finden.

Senkt man aus dem Scheitel ein Perpendikel auf die Grundfläche, ſo ſieht man leicht, daſs die 3 Winkel, die dieſes Perpendikel mit den Kanten im Scheitel bildet, die Complemente der Winkel ſind, welche die Kanten mit der Grundlinie bilden.

Die Formel (50) kann alſo hier angewandt werden, wenn man für dieſe 3 Winkel die Sinus ſtatt der Coſinus ſetzt. D. h. wenn man die 3 Kanten mit f, g, h, die Grundfläche mit L bezeichnet, und

$$g^\wedge h = m$$
$$h^\wedge f = n$$
$$f^\wedge g = p$$
$$f^\wedge L = s$$
$$g^\wedge L = q$$
$$h^\wedge L = r$$

ſetzt, ſo muſs man in der Formel (50, A oder 48, D)

s mit $\pi - s$ vertauſchen

q mit $\pi - q$

r mit $\pi - r$

oder was auf eins kommt, man ſetzt in dieſe Formel

für $\cos s \ldots . \sin s$

$\cos q \ldots . \sin q$

$\cos r \ldots . \sin r$

ſo erhält man folgende Formel

$$1 - \cos m^2 - \cos n^2 - \cos p^2 - \sin q^2 - \sin r^2 - \sin s^2$$
$$+ \cos m^2 . \sin s^2 + \cos n^2 . \sin q^2 + \cos p^2 . \sin r^2$$
$$+ 2\cos m . \cos n . \cos p + 2\cos m . \sin q . \sin r$$
$$+ 2\cos n . \sin r . \sin s + 2\cos p . \sin q . \sin s$$
$$- 2\cos m . \cos n . \sin q . \sin s - 2\cos m . \cos p . \sin r . \sin s$$
$$- 2\cos n . \cos p . \sin q . \sin r = 0 \ldots . . \text{(A)}$$

Aufgabe XXV.

55. Wenn von den 3 Winkeln, welche die im Scheitel zuſammenſtoſsenden Kanten einer dreyeckichten Pyramide mit den reſpective gegenüberſtehenden Seitenflä-

chen bilden, und den 3 Winkeln, welche mit eben dieſen Seitenflächen, eine beliebige, die Pyramide durchſchneidende grade Linie bildet, 5 gegeben ſind, den 6ten zu finden.

Durch den Scheitel der Pyramide ziehe ich eine der Transverſale parallele Linie, die alſo mit den Seitenflächen dieſelben Winkel als die Transverſale macht. Ziehen wir noch durch den Scheitelpunkt 3 Linien, die auf den Seitenflächen ſenkrecht ſtehen, ſo ſind die Winkel dieſer Linien mit der Parallele, Complemente der Winkel der Parallele mit den Seitenflächen. Bezeichnet man alſo die 3 Kanten mit f, g, h, die dieſen Kanten reſpective gegenüberſtehenden Seitenflächen mit F, G, H, die mit der Transverſale parallele Linie mit L, ſo ſind die Winkel, welche dieſe Linie mit den Perpendikeln auf den Seitenflächen bildet,

$$\pi - \widehat{LF}$$
$$\pi - \widehat{LG}$$
$$\pi - \widehat{LH}$$

Eben ſo ſind die Winkel der Perpendikel und gegenüberſtehenden Kanten die Complemente der Winkel, der Kanten und Seitenflächen.

Die 3 Perpendikel alſo und die Parallele mit der Transverſale ſind 4 Linien, die von einem Punkt ausgehen, und folgende 6 Winkel bilden, wovon die 3 letzten den 3 erſten entgegengeſetzt ſind:

$\pi - f^\wedge F$

$\pi - g^\wedge G$

$\pi - h^\wedge H$

$\pi - L^\wedge F$

$\pi - L^\wedge G$

$\pi - L^\wedge H$

Die Formel (50) ist also auf diese 6 Winkel anwendbar, d. h. wenn man

$$f^\wedge F = m$$
$$g^\wedge G = n$$
$$h^\wedge H = p$$
$$L^\wedge F = s$$
$$L^\wedge G = q$$
$$L^\wedge H = r$$

nimmt, so braucht man nur, statt Cosinus, Sinus in die Formel zu setzen, so wird

$$1 - \sin m^2 - \sin n^2 - \sin p^2 - \sin q^2 - \sin r^2 - \sin s^2$$
$$+ \sin m^2 . \sin s^2 + \sin n^2 . \sin q^2 + \sin p^2 . \sin r^2$$
$$+ 2 \sin m . \sin n . \sin p + 2 \sin m . \sin q . \sin r$$
$$+ 2 \sin n . \sin r . \sin s + 2 \sin p . \sin q . \sin s$$
$$- 2 \sin m . \sin n . \sin q . \sin s - 2 \sin m . \sin p . \sin r . \sin s$$
$$- 2 \sin n . \sin p . \sin q . \sin r = 0 \; . \; . \; . \; . \quad (A)$$

Bemerkung.

56. Wir könnten leicht die Zahl dieser Untersuchungen vergrössern, aber wir würden unsern Hauptgegenstand, das Verhältniss zwischen den Entfernungen von 5 Punkten im Raume zu untersuchen, aus den Augen verlieren. Er soll uns in der folgenden Aufgabe beschäftigen, doch kann ich die Pyramide nicht verlassen, ohne den Wunsch zu äussern, man

möge durch ſie für die Geometrie dreyer Dimenſionen eben das thun, was man für die ebene Geometrie durch die Auflöſung des Dreyecks in allen möglichen Fällen gethan hat. Wir haben freilich oben (45) die Auflöſung des allgemeinen Problems gegeben, aber eigentlich doch nicht mehr gethan, als es in Gleichung geſetzt, ſo wie man die allgemeine Aufgabe der Trigonometrie in Gleichung ſetzt, wenn man alle Theile des Dreyecks in Werthen dreyer von einander unabhängigen ausdrückt. Man ſoll aber dieſe Urgleichungen für jede beſondere Aufgabe entwickeln, und ihnen eine für den numeriſchen Calcul geſchmeidige Form geben. So würde es eine ungeheure Arbeit ſeyn, wenn man von den Urgleichungen unmittelbar auf die algebraiſche oder numeriſche Auflöſung der Pyramide in allen beſondern Fällen kommen wollte, wenn gleich dieſe Arbeit ſehr nützlich ſeyn würde.

57. Schlieſslich bemerke ich noch, daſs man in allen vorigen Formeln gewiſſe Claſſen von Quantitäten findet, deren Summe man, um die Rechnung zu verkürzen, durch einen Buchſtaben vorſtellen kann. So ſind z. B. in der Formel (IV, 12, A) die 6 erſten Glieder des Factors, der mit $4RR$ multiplicirt wird, nichts als die Producte der 4ten Potenz jeder Kante mit dem Quadrat der gegenüberſtehenden multiplicirt. Man kann dieſe Summe alſo durch M bezeichnen.

Die 4 folgenden Glieder ſind die Summen der Producte der Quadrate derjenigen 3 Kanten, welche eine Seitenfläche begränzen. Wir bezeichnen ſie mit N.

Die 12 folgenden Glieder ſind die Summe der Producte der zur zweyten Potenz erhobenen Kanten zu dreyen multiplicirt, indem man ſie nach der Reihe nahm, ſo daſs 2 gegenüberſtehende in jedem Producte ſind. Wir bezeichnen ſie mit O.

Die 3 folgenden Glieder ſind die doppelte Summe der Producte der quadrirten Kanten zu 4 genommen, ſo daſs in dieſen 4 zwey Paar gegenüberſtehende ſind. Wir bezeichnen ſie mit P.

Die 3 letzten Glieder bilden die Summe der Producte der Kanten in der vierten Potenz zu zweyen genommen. Wir bezeichnen ſie mit Q.

Dann wird die Formel

$$4RR\,(M+N-O)+P-Q=o\ \ldots\ (A)$$

Die Formel (II, 6, A) läſst ſich ſo ausdrücken:

$$xx\,(2m^2n^2+2m^2p^2+2n^2p^2-m^4-n^4-p^4)$$
$$+M+N-O=o\ \ldots\ (B)$$

Die Formel (III, 9, A) ſo:

$$9\cdot 16\cdot SS+M+N-O=o\ \ldots\ (C)$$

Eben ſo bey den meiſten Formeln bis (48). Man kann ſie auf dieſe Art leichter combiniren; z. B. verbindet man die erſte mit der dritten, ſo hat man

$$1.\,1.\,2.\,2.\,3.\,3.\,4.\,4.\ RR.\,SS=Q-P\ \ldots\ (D)$$

Da

$$Q=m^4f^4+g^4n^4+h^4p^4$$
$$P=2n^2g^2p^2h^2+2m^2p^2f^2h^2+2m^2n^2f^2g^2$$

ſo haben wir, wenn wir in dieſe Formeln die (47) gefundenen Werthe ſetzen:

$$Q=16\,R^8\{(1-\cos m')^2\,(1-\cos f'+(1-\cos g')^2$$
$$(1-\cos n')^2+(1-\cos h')^2\,(1-\cos p')^2\}$$

$$P = 2 . 16 \{ (1 - \cos n')(1 - \cos p')(1 - \cos g')(1 - \cos h') + (1 - \cos m')(1 - \cos p')(1 - \cos f')(1 - \cos h') + (1 - \cos m')(1 - \cos n')(1 - \cos f')(1 - \cos g') \}$$

ſetzt man dieſe Werthe von Q, und P in die vorige Formel, und dividirt mit $16RR$, ſo haben wir folgende Formel, die den Inhalt der Pyramide in Werthen des Halbmeſſers der umſchriebenen Kugel und der 6 Winkel giebt, die die Radien am Mittelpunkte bilden, welche man nach den Scheiteln der Pyramide zog.

$$S = \tfrac{1}{6} R^3 \sqrt{} \{ (1 - \cos m')^2 (1 - \cos f')^2 + (1 - \cos g')^2 (1 - \cos n')^2 + (1 - \cos h')^2 (1 - \cos p')^2 - 2(1 - \cos n')(1 - \cos p')(1 - \cos g')(1 - \cos h') - 2(1 - \cos m')(1 - \cos p')(1 - \cos f')(1 - \cos h') - 2(1 - \cos m')(1 - \cos n')(1 - \cos f')(-1 \cos g') \} \quad \ldots\ldots \quad (E)$$

Aufgabe XXVI.

58. **Wenn von 10 Linien, die 5 im Raume gegebne Punkte verbinden, 9 gegeben ſind, die 10te zu finden.**

Es ſeyen (Fig. 8.) $A, B, C, D, E,$ die 5 gegebenen Punkte. Wir wollen die 10 Linien, welche ſie verbinden, ſo bezeichnen:

$\overline{AD} = f$

$\overline{AB} = g$

$\overline{AC} = h$

$\overline{AE} = l$

$\overline{BC} = m$

$\overline{CD} = n$

$$\overline{BD} = p$$
$$\overline{BE} = q$$
$$\overline{CE} = r$$
$$\overline{DE} = s$$

Dann nehmen wir einen Punkt, z. B. A, als Mittelpunkt einer Kugel von beliebigem Halbmesser, und verlängern die 4 Linien oder Kanten, die von A ausgehen, bis sie die Oberfläche der Kugel in B', C', D', E' treffen, verbinden diese Punkte durch Bögen größter Kreise, die wir so bezeichnen:

$$\widehat{B'C'} = m'$$
$$\widehat{C'D'} = n'$$
$$\widehat{B'D'} = p'$$
$$\widehat{D'E'} = s'$$
$$\widehat{B'E'} = q'$$
$$\widehat{C'E'} = r'$$

Wir haben (48.) zwischen diesen Bögen folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}1 &- \cos m'^2 - \cos n'^2 - \cos p'^2 - \cos q'^2 - \cos r'^2 - \cos s'^2 \\ &+ \cos m'^2 . \cos s'^2 + \cos n'^2 . \cos q'^2 + \cos p'^2 . \cos r'^2 \\ &+ 2\cos m' . \cos n' . \cos p' + 2\cos m' . \cos q' . \cos r' \\ &+ 2\cos n' . \cos r' . \cos s' + 2\cos p' . \cos q' . \cos s' \\ &- 2\cos m' . \cos n' . \cos q' . \cos s' - 2\cos m' . \cos p' . \\ &\qquad \cos r' . \cos s' \\ &- 2\cos n' . \cos p' . \cos q' . \cos r' = 0 \; . \; . \; . \; . \quad (A)\end{aligned}$$

Da aber die Bögen m', n', u. s. w. das Maaſs der Winkel $B\hat{A}C$, $C\hat{A}D$ u. s. w., so haben wir auch

$$\cos m' = \frac{gg + hh - mm}{2gh}$$

$$\cos n' = \frac{ff + hh - nn}{2fh}$$

$$\cos p' = \frac{gg + ff - pp}{2gf}$$

$$\cos s = \frac{ff + ll - ss}{2fl}$$

$$\cos q = \frac{gg + ll - qq}{2gl}$$

$$\cos r = \frac{hh + ll - rr}{2hl}$$

Setzt man diefe Werthe in die Gleichung (A), bringt alles auf denfelben Nenner $16 . ff\,gg\,hh\,ll$, und hebt die Glieder, bey denen es angeht, auf, fo erhält man nach einer langen Rechnung folgende fymmetrifche Formel zwifchen f, g, h, l, m, n, p, q, r, s, die, wenn gleich vom vierten Grade, doch wie eine quadratifche aufgelöfet werden kann.

$g^4n^4 + g^4s^4 + g^4r^4$
$+ h^4s^4 + h^4q^4 + h^4p^4$
$+ f^4m^4 + f^4q^4 + f^4r^4$
$+ l^4m^4 + l^4n^4 + l^4p^4$
$+ m^4s^4 + n^4q^4 + r^4p^4$
$- 2g^4n^2s^2 - 2g^4n^2r^2 - 2g^4r^2s^2$
$- 2h^4q^2s^2 - 2h^4p^2s^2 - 2h^4p^2q^2$
$- 2f^4m^2q^2 - 2f^4m^2r^2 - 2f^4q^2r^2$
$- 2l^4m^2n^2 - 2l^4m^2p^2 - 2l^4n^2p^2$
$- 2m^4f^2l^2 - 2m^4f^2s^2 - 2m^4l^2s^2$
$- 2n^4g^2l^2 - 2n^4g^2q^2 - 2n^4l^2q^2$
$- 2s^4g^2h^2 - 2s^4g^2m^2 - 2s^4h^2m^2$
$- 2q^4f^2h^2 - 2q^4h^2n^2 - 2q^4f^2n^2$
$- 2r^4f^2g^2 - 2r^4g^2p^2 - 2r^4f^2p^2$
$- 2p^4h^2l^2 - 2p^4h^2r^2 - 2p^4l^2r^2$
$- 4g^2h^2m^2s^2 - 4f^2g^2p^2r^2 - 4g^2l^2n^2q^2$
$- 4g^2n^2r^2s^2 - 4f^2h^2n^2q^2 - 4h^2l^2p^2r^2$
$- 4h^2p^2q^2s^2 - 4f^2l^2m^2s^2 - 4f^2m^2q^2r^2$
$- 4l^2m^2n^2p^2 - 2g^2h^2n^2p^2 - 2g^2h^2q^2r^2$
$- 2f^2g^2m^2r^2 - 2f^2g^2q^2s^2 - g^2l^2m^2r^2$
$- 2g^2l^2p^2s^2 - 2f^2h^2m^2p^2 - 2f^2h^2r^2s^2$
$- 2h^2l^2m^2q^2 - 2h^2l^2n^2s^2 - 2f^2l^2n^2r^2$
$- 2f^2l^2p^2q^2 - 2m^2n^2q^2s^2 - 2m^2p^2r^2s^2$
$- 2n^2p^2q^2r^2$
$+ 2g^2h^2n^2s^2 + 2g^2h^2n^2q^2 + 2g^2h^2q^2s^2$
$+ 2g^2h^2r^2s^2 + 2g^2h^2p^2s^2 + 2g^2h^2p^2r^2$
$+ 2f^2g^2m^2s^2 + 2f^2g^2m^2r^2 + 2f^2g^2n^2q^2$
$+ 2f^2g^2n^2r^2 + 2f^2g^2r^2s^2 + 2f^2g^2q^2r^2$
$+ 2g^2l^2m^2n^2 + 2g^2l^2m^2s^2 + 2g^2l^2n^2s^2$
$+ 2g^2l^2n^2r^2 + 2g^2l^2n^2p + 2g^2l^2p^2r^2$
$+ 2g^2m^2n^2s^2 + 2g^2m^2r^2s^2 + 2g^2n^2q^2s^2$

$$+2g^2n^2q^2r^2 +2g^2n^2p^2r^2 +2g^2p^2r^2s^2$$
$$+2f^2h^2m^2s^2 +2f^2h^2m^2q^2 +2f^2h^2q^2s^2$$
$$+2f^2h^2q^2r^2 +2f^2h^2p^2q^2 +2f^2h^2p^2r^2$$
$$+2h^2l^2m^2s^2 +2h^2l^2m^2p^2 +2h^2l^2n^2q^2$$
$$+2h^2l^2n^2p^2 +2h^2l^2p^2s^2 +2h^2l^2p^2q^2$$
$$+2h^2m^2q^2s^2 +2h^2m^2p^2s^2 +h^2n^2q^2s^2$$
$$+2h^2n^2p^2q^2 +2h^2p^2r^2s^2 +2h^2p^2q^2r^2$$
$$+2f^2l^2m^2n^2 +2f^2l^2m^2q^2 +2f^2\,{}^2m^2r^2$$
$$+2f^2l^2m^2p^2 +2f^2l^2n^2q^2 +2f^2l^2p^2r^2$$
$$+2f^2m^2n^2q^2 +2f^2m^2q^2s^2 +2f^2m^2r^2s^2$$
$$+2f^2m^2p^2r^2 +2f^2n^2q^2r^2 +2f^2p^2q^2r^2$$
$$+2l^2m^2n^2s^2 +2l^2m^2n^2q^2 +2l^2m^2p^2s^2$$
$$+2l^2m^2p^2r^2 +2l^2n^2p^2q^2 +2l^2n^2p^2r^2 = o \ldots \text{(A)}$$

59. Obgleich diese Formel von 130 Gliedern beym ersten Anblick etwas verwickelt scheint, so ist sie doch symmetrisch, und einem leicht aufzufassenden Gesetze unterworfen. Denn

1) die 15 ersten Glieder sind die Producte der vierten Potenz derjenigen Kanten, die keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben. Wir bezeichnen diese Summe mit F.

2) Die 30 folgenden Glieder sind die doppelte Summe der Producte jeder Kante in der vierten Potenz mit den Quadraten zweyer gegenüberstehenden Seiten. Es sey diese Summe $= G$.

3) Die 10 folgenden Glieder bilden die vierfache Summe der Producte der Quadrate jeder Kante mit dem Producte der Quadrate der 3 gegenüberstehenden multiplicirt. Es sey diese Summe $= H$.

4) Die 15 folgenden Glieder bilden die doppelte Summe der Producte der Quadrate der Seiten eines jeden der Vierecke, die nicht in einer Ebene liegen, und bey der Conſtruction der Pyramide vorkommen. Es ſey dieſe Summe $= K$.

5) Endlich die 60 letzten Glieder ſind die doppelte Summe der Producte der Quadrate der 4 Kanten, die den Umfang eines Fünfecks, das nicht in einer Ebene liegt, bilden würden, von dem man die eine Seite weggenommen hat. So z. B. iſt $ABCDEA$ der Umfang eines ſolchen Fünfecks, deſſen Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$ ſind; nimmt man die Seite $\overline{CD}$ weg, ſo bleiben $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DE}$, $\overline{AE}$, aus denen das 14te Glied der letzten 60, nämlich: $2g^2l^2m^2s^2$ beſteht. Iſt dieſe Summe nun $= L$, ſo kann man die Formel (A) ſo ausdrücken:

$$F - 2G - 4H - 2K + 2L = o \; . \; . \; . \; . \quad (B)$$

60. Aus dieſer merkwürdigen Formel, dem eigentlichen Gegenſtande dieſer Abhandlung, flieſst die Auflöſung vieler ſchwieriger Aufgaben. Z. B. wenn 4 Punkte im Raume gegeben ſind, einen 5ten zu finden, deſſen Entfernungen von den 4 erſten in gegebenem Verhältniſſe ſind u. ſ. w.

Stellt man ſich von den 5 Punkten im Raume 4 als den Scheitel einer dreyeckichten Pyramide vor, und den 5ten als den Mittelpunkt der umſchriebenen Kugel, ſo findet man durch die vorige Formel den Halbmeſſer dieſer Kugel. Iſt E dieſer Mittelpunkt, ſo braucht man nur ſtatt l, q, r, s dieſen Halbmeſſer $= R$ zu ſetzen, und man erhält eine Formel, die, wie ſie muſs, identiſch mit der ſchon gefundenen (12, A) iſt.

61. So

61. So kann man auch das Verhältniſs zwiſchen den Entfernungen von 5 beliebigen auf der Oberfläche einer Kugel genommenen Punkten finden. Der Radius dieſer Kugel ſey $= R$, ſo hat man R in Werthen von m, n, p, f, g, h aus (60); da aber E auch auf der Kugelfläche iſt, ſo muſs eine ähnliche Gleichung ſtatt finden, wenn man s, q, r, für f, g, h ſetzt. Setzt man die aus beyden Gleichungen gefundenen Werthe von RR gleich, ſo hat man das Verhältniſs, das zwiſchen den 9 Kanten $m, n, p, f, g, h, s, q, r$ beſtehen muſs, wenn die 5 Punkte auf einer Kugelfläche ſeyn ſollen. Eben ſo beſteht ein ähnliches Verhältniſs zwiſchen $m, n, p, f, g, h, s, q, r, l$ zu Neunen auf alle mögliche Weiſe genommen, was alſo im Ganzen 10 Verhältniſſe von derſelben Art, wie das vorige, ausmacht.

Aufgabe XXVII.

62. Wenn man die Entfernungen 5 beliebiger Punkte im Raume kennt, den Neigungswinkel zu finden, den eine Linie, die durch 2 dieſer Punkte geht, mit der Ebene macht, die durch die andern 3 gelegt wird.

Die 5 gegebenen Punkte ſeyen A, B, C, D, E (Fig. 10.). Die Linie gehe durch A, B, die Ebene durch C, D, E. Sowohl aus A, als aus B ſenken wir Perpendikel auf die Ebene CDE, und legen durch dieſe beyden Perpendikel eine Ebene, in der die Linie, welche durch A und B geht, liegen muſs. Die beyden Perpendikel ſeyen $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$. Ziehen wir nun

durch a, b, eine grade Linie, die $\overline{AB}$ in K schneidet, so ist der Winkel $A\hat{K}a$ der gesuchte. Eben so wird aus B das Perpendikel $\overline{Ba'}$ auf Aa gesenkt, so ist

$$A\hat{B}a' = A\hat{K}a$$

und wir haben

$$\sin A\hat{K}a = \frac{\overline{Aa'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{Aa} - \overline{Bb}}{\overline{AB}}$$

Betrachten wir nun A als den Scheitel einer Pyramide, deren Grundfläche CDE ist, so kann man leicht die Höhe $\overline{Aa}$ durch die Formel (6) finden. Eben so findet man $\overline{Bb}$, wenn man B als den Scheitel einer Pyramide betrachtet, deren Grundfläche auch CDE ist. Da nun nach der Annahme $\overline{AB}$ auch bekannt ist, so ist der Werth von $\sin A\hat{K}a$ in lauter bekannten Größen ausgedrückt.

Kennte man von den 10 Linien, welche die Punkte A, B, C, D, E verbinden, nur 9, so müßte man erst die 10te suchen (58.) und dann wie vorher verfahren.

Aufgabe XXVIII.

63. Wenn man von 6 Punkten im Raume die Entfernungen von einander kennt, den Winkel zu finden, den die beyden Ebenen machen, von denen eine 3 beliebige, und die andere die 3 übrigen enthält.

Es seyen (Fig. 11.) A, B, C, M, N, P die 6 Punkte, man sucht den Winkel, den die Ebene durch A, B, C, mit der Ebene durch M, N, P macht.

Wir wollen uns vorſtellen, daſs aus jedem der erſten Punkte *A*, *B*, *C* ein Perpendikel auf die zweyte Ebene geſenkt ſey. Da die Entfernungen aller Punkte gegeben ſind, ſo laſſen ſich dieſe Perpendikel leicht finden; denn ſtellt man ſich aus dem Punkte *A*, z. B. die Linien $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{AP}$, gezogen vor, ſo hat man eine dreyeckichte Pyramide, deren 6 Kanten gegeben ſind, und deren Höhe das geſuchte Perpendikel iſt.

Wird nun $\overline{AB}$ verlängert, bis ſie die beiden Ebenen *ABC*, *MNP* trifft, und verbindet man die Füſse der Perpendikel aus *A*, *B*, auf die Ebene *MNP* geſenkt durch eine gerade Linie, ſo wird dieſe Linie, $\overline{AB}$ im Durchſchnitte der Ebenen *ABC*, *MNP* treffen, und dieſe Linien bilden mit den obigen Perpendikeln ähnliche rechtwinklichte Dreyecke, zu denen man

1) die beyden Perpendikel;

2) die Entfernung $\overline{AB}$ ihrer Scheitel kennt.

Man findet alſo leicht die andern Seiten dieſer Dreyecke durch dieſe Proportion. Die Differenz der beyden Perpendikel verhält ſich zu $\overline{AB}$, wie das Perpendikel aus *B*, zu der Entfernung des Punktes *B* von dem Punkte, wo $\overline{AB}$ die Ebene *MNP* trifft.

Eben ſo findet man die Entfernung von *B*, von dem Punkte, wo $\overline{AC}$ die Ebene *MNP* ſchneidet; verlängert man alſo die beyden Linien $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ bis zum Durchſchnitt der Ebenen *ABC*, *MNP*, ſo bilden ſie, und dieſer Durchſchnitt ſelbſt, ein gradlinichtes Dreyeck, zu dem man die beyden Seiten, die in der Richtung von *AB*, *AC* liegen, und den Winkel an *B* kennt.

Man hat alſo durch das erſte Lemma das Perpendikel aus *B* auf den Durchſchnitt der beyden Ebenen, und da auch das Perpendikel aus *B* auf *MNP* bekannt iſt, ſo hat man, wenn man die Füſse dieſer beyden Perpendikel verbindet, ein rechtwinklichtes Dreyeck, deſſen Hypothenuſe und eine Cathete man kennt. Man findet alſo leicht den dieſer Cathete gegenüberſtehenden Winkel, welches der Winkel iſt, den die beyden Ebenen *ABC*, *MNP* mit einander machen.

Aufgabe XXIX.

64. Ein beliebiges Syſtem von Punkten im Raume iſt gegeben, man kennt die Entfernungen eines jeden von 3 andern willkührlich angenommenen feſten Punkten, und ſoll die Linien von einem Punkte des Syſtems zum andern finden, ferner die Winkel, welche dieſe Linien bilden, die Winkel, welche dieſe Linien mit den Ebenen machen, die durch 3 dieſer Punkte gehen, die Winkel dieſer Ebenen unter einander, das Perpendikel aus jedem Punkte des Syſtems, auf die Linie, die zwey andre verbindet, oder auf eine Ebene, in der 3 liegen, die kürzeſte Entfernung zweyer ſolcher Linien u. ſ. w.

Da man die Entfernung jedes Punktes von 3 feſten kennt, ſo ſind 9 von den 10 Linien, die dieſe 5 Punkte verbinden, gegeben, man findet alſo die 10te, welches die geſuchte Entfernung der beyden Punkte

ist, durch (58). Um die Winkel dieser Linien zu finden, braucht man die Punkte nur zu dreyen, zu betrachten, so hat man Dreyecke, deren Seiten, also auch Winkel bekannt sind. Die Endpunkte aber der Linien, die sich nicht schneiden, muſs man verbinden, und sie wie die 4 Scheitelpunkte einer dreyeckichten Pyramide betrachten, deren zwey gegenüberstehende Kanten diese Linien sind, dann hat man (27) den Winkel, den sie bilden. Aus (41) findet man die kürzeste Entfernung.

Um das Perpendikel aus einem Punkte des Systems auf eine Linie zu finden, die zwey andere Punkte verbindet, braucht man nur die dritte Formel des ersten Lemma auf das Dreyeck anzuwenden, dessen Scheitel in dem Punkte ist, von dem das Perpendikel ausgehen soll, und dessen Grundlinie von den beyden andern Punkten begränzt wird.

Das Perpendikel aus einem Punkte, auf die Ebene, die durch 3 andere geht, findet man, wie die Höhe einer Pyramide, deren 6 Kanten bekannt sind.

Die verlangten Winkel findet man aus (31 fgg.).

Aufgabe XXX.

65. Wenn irgend ein System von Punkten im Raume gegeben ist, und man die Entfernung eines jeden von einem andern festen Punkte kennt (ich nenne diese Entfernung den radius vector) und auſserdem die Winkel kennt, welche dieser radius vector mit zwey festen Axen macht,

die durch ſeinen Anfangspunkt gehen, die Linien zu finden, welche alle Punkte des Syſtems zu zweyen verbinden, die Winkel, welche dieſe Linien unter ſich machen u. ſ. w.

Vergleicht man alle radii vectores zu zweyen genommen mit den beyden feſten Axen, ſo hat man 4 Linien, die von demſelben Punkt ausgehen, und dieſe 4 Linien bilden 6 Winkel, von denen 5 nach der Hypotheſe bekannt ſind. Der einzige unbekannte iſt der, den die radii vectores umfaſſen, man findet ihn durch (XXI, 50). Nachher durch das Lemma I. die Entfernungen, das andere wie in der vorigen Aufgabe.

Aufgabe XXXI.

66. Eine dreyeckichte Pyramide iſt auf 3 unter einander rechtwinklichte Ebenen bezogen, alle Theile dieſer Pyramide in Werthen der 12 Coordinaten der Scheitelpunkte auszudrücken.

Ich behalte die Bezeichnungen der Aufgabe II fgg. und nenne auſserdem

a, a', a'', die Coordinaten von A

b, b', b'', die Coordinaten von B

c, c', c'', die Coordinaten von C

d, d', d'', die Coordinaten von D.

Dann haben wir offenbar

$$mm = (b-c)^2 + (b'-c')^2 + (b''-c'')^2$$

$$nn = (c-d)^2 + (c'-d')^2 + (c''-d'')^2$$

$$pp = (d-b)^2 + (d'-b')^2 + (d''-b'')^2$$

$$ff = (d-a)^2 + (d'-a')^2 + (d''-a'')^2$$
$$gg = (a-b)^2 + (a'-b')^2 + (a''-b'')^2$$
$$hh = (c-a)^2 + (c'-a')^2 + (c''-a'')^2$$

Subſtituirt man dieſe Werthe von mm, nn, u. ſ. w. in den Formeln, die alle Theile der Pyramide in Werthen ihrer Kanten ausdrücken, ſo hat man das geſuchte.

67. Eben das kann man auf ein Polyeder anwenden, d. h. man kann eben ſo folgende allgemeinere Aufgabe löſen:

Wenn ein Polyeder auf 3 ſenkrechte Ebenen bezogen iſt, alle ſeine Theile in Werthen der Coordinaten, der Scheitelpunkte auszudrücken.

Es bedarf dazu nur des vorigen Verfahrens, und der Aufgabe (XXIX, 64).

So verbindet man die Methode der Dreyecke, und die der Projectionen oder Coordinaten. Jede hat eigene Vortheile; folgt man der erſten, ſo drückt man gradezu alle Theile des Syſtems in Werthen einiger aus, die hinreichen alle übrigen zu beſtimmen, wodurch man die Gegebenen immer verändern kann, indem man ſie aus den Elementen der Figur nimmt.

Hingegen bey der Methode der Projectionen fängt man damit an, alle Quantitäten des Syſtems durch die Coordinaten auszudrücken, wozu man durch allgemeine ſehr ſinnreiche Methoden gelangt, nachher muſs man aber alle dieſe Coordinaten, die nur Hülfsgröſsen ſind, eliminiren, um die Elemente der Figur dafür zu ſubſtituiren. Man darf alſo hier die Aufgabe nicht eher für gelöſt halten, bis die Elimination der Coor-

dinaten bewerkſtelligt iſt. In dieſer Elimination beſteht die hauptſächlichſte Schwierigkeit der Methode, weil man mehr Unbenannte zu eliminiren hat, als Gleichungen da ſind, ſo daſs es beſonderer analytiſcher Kunſtgriffe bedarf, um durch willkührliche Bedingungen dahin zu gelangen.

Bey der Pyramide z. B. braucht man nur 6 Gegebene, wozu wir die Kanten wählten, und ſo haben wir alle andere Quantitäten des Syſtems in Werthen dieſer gefunden.

Nach der Projectionsmethode hingegen, betrachtet man anfänglich die 12 Coordinaten der 4 Scheitelpunkte als gegeben; da man ſie aber alle eliminiren muſs, und doch nur 6 Gegebene hat (die 6 Kanten), ſo erſetzt man die fehlenden Gegebenen durch 6 willkührliche Bedingungen, die darauf beruhen, daſs, da die rechtwinklichten Ebenen, auf die man das Syſtem bezieht, willkührlich angenommen ſind, man auch den Urſprung der 3 Axen und ihre Richtungen, wo und wie man will, annehmen kann. Man muſs alſo dieſe 6 willkührlichen Bedingungen durch 6 neue Gleichungen ausdrücken, wodurch man denn endlich zur Elimination kommt.

In der Kunſt, den Umſtänden gemäſs auf die einfachſte Art die Rechnung zu führen, liegen die vorzüglichſten Hülfsquellen dieſer fruchtbaren Methode, die weſentlich auf der Kunſt beruht, das Coordinatenſyſtem zu verändern, damit man Urſprung und Richtung ſo vortheilhaft wie möglich wählen kann. Ich habe deswegen hier noch mich mit dem wichtigen Problem der Umformnng der Axen, ohne

den Urſprung zu verrücken, in der gröſsten Allgemeinheit genommen, beſchäftigt. Man weiſs, daſs, um den Urſprung zu verändern, man nur eine willkührliche Conſtante zu jeder Coordinate zu addiren braucht.

Aufgabe XXXII.

68. Wenn die Lage eines Punktes im Raume durch 3 beliebige Coordinaten beſtimmt iſt, die gegebene Winkel machen, die Richtungen dieſer Coordinaten zu verändern, vorausgeſetzt, daſs man den Winkel kennt, den jede der neuen Coordinaten, mit jeder der alten macht.

Es ſey M (Fig. 12.) der gegebene Punkt, deſſen Lage im Raume durch die 3 Coordinaten

$$\overline{AP} = x$$
$$\overline{AQ} = y$$
$$\overline{AR} = z$$

beſtimmt iſt. Man betrachtet dieſe Coordinaten als gegeben, und eben ſo die Winkel, welche ſie unter einander bilden,

$$\left.\begin{array}{l} P\hat{A}Q = x\hat{\ }y \\ P\hat{A}R = x\hat{\ }z \\ Q\hat{A}R = y\hat{\ }z \end{array}\right\} \ldots\ldots (A)$$

Nun bleibe der Urſprung A derſelbe, und die neuen Coordinaten ſeyen

$$\left.\begin{array}{l} \overline{Ap} = x' \\ \overline{Aq} = y' \\ \overline{Ar} = z' \end{array}\right\} \ldots\ldots (B)$$

von denen jede mit den ersten die gegebenen Winkel bildet:

$$\left.\begin{array}{l} p\hat{A}P = x^\wedge x' \\ p\hat{A}Q = y^\wedge x' \\ p\hat{A}R = z^\wedge x' \end{array}\right\} \cdots\cdots (C)$$

$$\left.\begin{array}{l} q\hat{A}P = x^\wedge y' \\ q\hat{A}Q = y^\wedge y' \\ q\hat{A}R = z^\wedge y' \end{array}\right\} \cdots\cdots (D)$$

$$\left.\begin{array}{l} r\hat{A}P = x^\wedge z' \\ r\hat{A}Q = y^\wedge z' \\ r\hat{A}R = z^\wedge z' \end{array}\right\} \cdots\cdots (E)$$

Man soll nun die ersten Coordinaten x, y, z, in Werthen der neuen x', y', z', und die 12 Winkel finden.

Ich bemerke zuerst, daſs man von den Winkeln (C) nur 2 zu kennen braucht, um den 3ten zu finden. Wenn es also in der Aufgabe heiſst, daſs diese 3 Winkel gegeben sind, so bedeutet das nur, daſs 2 unmittelbar gegeben sind, und daſs der 3te durch diese beyden und eine Bedingungsgleichung bestimmt ist. Man kann diese Bedingungsgleichung leicht finden, denn die 4 graden Linien x, y, z, x', bilden unter einander die 6 Winkel:

$$x^\wedge y,\ x^\wedge z,\ y^\wedge z,\ x^\wedge x',\ y^\wedge x',\ z^\wedge x',$$

von denen die 3 ersten und beyden letzten nach der Hypothese gegeben sind. Man kann also die Formel (50) darauf anwenden, wenn man setzt:

$$\left.\begin{array}{l} x^\wedge y = m \\ x^\wedge z = n \\ y^\wedge z = p \\ x^\wedge x' = r \\ y^\wedge x' = q \\ z^\wedge x' = s \end{array}\right\} \ldots\ldots \text{(F)}$$

Eben ſo iſt es bey den Winkeln (D), wo man dieſelbe Bedingungsgleichung anwendet, indem man

$$\left.\begin{array}{l} x^\wedge y = m \\ x^\wedge z = n \\ y^\wedge z = p \\ x^\wedge y' = r \\ y^\wedge y' = q \\ z^\wedge y' = s \end{array}\right\} \ldots\ldots \text{(G)}$$

Endlich iſt es auch ſo mit den Winkeln (E), wenn man

$$\left.\begin{array}{l} x^\wedge y = m \\ x^\wedge z = n \\ y^\wedge z = p \\ x^\wedge z' = r \\ y^\wedge z' = q \\ z^\wedge z' = s \end{array}\right\} \ldots\ldots \text{(H)}$$

ſetzt. Man hat alſo, um wirklich alle als gegeben betrachtete Winkel zu beſtimmen, die doch nur implicite gegeben ſind, folgende 3 Bedingungsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
1 &- \cos x{}^\wedge y^2 - \cos x{}^\wedge z^2 - \cos x{}^\wedge x'^2 - \cos y{}^\wedge x'^2 - \cos z{}^\wedge x'^2 \\
&+ \cos x{}^\wedge y^2 \cdot \cos z{}^\wedge x'^2 + \cos x{}^\wedge z^2 \cdot \cos y{}^\wedge x'^2 \\
&\qquad + \cos y{}^\wedge z^2 \cdot \cos x{}^\wedge x'^2 \\
&+ 2\cos x{}^\wedge y \cdot \cos x{}^\wedge z \cdot \cos y{}^\wedge z + 2\cos x{}^\wedge y \cdot \cos y{}^\wedge x' \\
&\qquad \cdot \cos x{}^\wedge x' \\
&+ 2\cos x{}^\wedge z \cdot \cos x{}^\wedge x' \cdot \cos z{}^\wedge x' + 2\cos y{}^\wedge z \cdot \cos y{}^\wedge x' \\
&\qquad \cdot \cos z{}^\wedge x' \\
&- 2\cos x{}^\wedge y \cdot \cos x{}^\wedge z \cdot \cos y{}^\wedge x' \cdot \cos z{}^\wedge x' - 2\cos x{}^\wedge y \\
&\qquad \cdot \cos y{}^\wedge z \cdot \cos x{}^\wedge x' \cdot \cos z{}^\wedge x' \\
&- 2\cos x{}^\wedge z \cdot \cos y{}^\wedge z \cdot \cos y{}^\wedge y' \cdot \cos x{}^\wedge y' = 0 \; \ldots . \; (K)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 &- \cos x{}^\wedge y^2 - \cos x{}^\wedge z^2 - \cos y{}^\wedge z^2 - \cos x{}^\wedge y'^2 - \cos y{}^\wedge y'^2 \\
&\qquad - \cos z{}^\wedge y'^2 \\
&+ \cos x{}^\wedge y^2 \cdot \cos z{}^\wedge y'^2 + \cos x{}^\wedge z^2 \cdot \cos y{}^\wedge y'^2 \\
&\qquad + \cos y{}^\wedge z^2 \cdot \cos x{}^\wedge y'^2 \\
&+ 2\cos x{}^\wedge y \cdot \cos x{}^\wedge z \cdot \cos y{}^\wedge z + 2\cos x{}^\wedge y \cdot \cos x{}^\wedge y' \\
&\qquad \cos y{}^\wedge y' \\
&+ 2\cos x{}^\wedge z \cdot \cos x{}^\wedge y' \cdot \cos z{}^\wedge y' + 2\cos y{}^\wedge z \cdot \cos y{}^\wedge y' \\
&\qquad \cdot \cos z{}^\wedge y' \\
&- 2\cos x{}^\wedge y \cdot \cos x{}^\wedge z \cdot \cos y{}^\wedge y' \cdot \cos z{}^\wedge y' - 2\cos x{}^\wedge y \\
&\qquad \cdot \cos y{}^\wedge z \cdot \cos x{}^\wedge y' \cdot \cos z{}^\wedge y' \\
&- 2\cos x{}^\wedge z \cdot \cos y{}^\wedge z \cdot \cos x{}^\wedge y' \cdot \cos y{}^\wedge y' = 0 \; \ldots . \; (L)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 &- \cos x{}^\wedge y^2 - \cos x{}^\wedge z^2 - \cos x{}^\wedge z'^2 - \cos y{}^\wedge z'^2 - \cos z{}^\wedge z'^2 \\
&+ \cos x{}^\wedge y^2 \cdot \cos z{}^\wedge z'^2 + \cos x{}^\wedge z^2 \cdot \cos y{}^\wedge z'^2 + \cos y{}^\wedge z^2 \\
&\qquad \cdot \cos x{}^\wedge z'^2 \\
&+ 2\cos x{}^\wedge y \cdot \cos x{}^\wedge z \cdot \cos y{}^\wedge z + 2\cos x{}^\wedge y \cdot \cos x{}^\wedge z' \\
&\qquad \cdot \cos y{}^\wedge z' \\
&+ 2\cos x{}^\wedge z \cdot \cos x{}^\wedge z' \cdot \cos z{}^\wedge z' + 2\cos y{}^\wedge z \cdot \cos y{}^\wedge z' \\
&\qquad \cdot \cos z{}^\wedge z' \\
&- 2\cos x{}^\wedge y \cdot \cos x{}^\wedge z \cdot \cos y{}^\wedge z' \cdot \cos z{}^\wedge z' - 2\cos x{}^\wedge y \\
&\qquad \cdot \cos y{}^\wedge z \cdot \cos x{}^\wedge z' \cdot \cos z{}^\wedge z' \\
&- 2\cos x{}^\wedge z \cdot \cos y{}^\wedge z \cdot \cos y{}^\wedge z' \cdot \cos z{}^\wedge z' = 0 \; \ldots . \; (M)
\end{aligned}
$$

Da nun alle Winkel (A, B, C, D, E,) bekannt ſind, müſſen wir die erſten Coordinaten in Werthen von x', y', z', und von dieſen Winkeln finden.

Dazu conſtruire ich die beyden Parallelepipeden $APQRSMT$, $ApqrsMt$, das erſte von den erſten Coordinaten, x, y, z, das zweyte von den zweyten Coordinaten x', y', z', indem ich beyde mal vom Punkte A ausgehe. Sie haben alſo zur gemeinſchaftlichen Diagonale den Radius Vector $\overline{AM}$.

Nun zeigt die bloſse Anſicht der Figur, daſs $APTMtpA$ ein Sechseck ſey, das nicht in einer Ebene liegt, deſſen 3 erſte Seiten $\overline{AP}$, $\overline{PT}$, $\overline{TM}$ die alten Coordinaten x, z, y, und die 3 andern $\overline{Ap}$, $\overline{pt}$, $\overline{tM}$ die neuen Coordinaten x', z', y', ſind, und daſs die Winkel, welche dieſe Linien bilden, diejenigen ſeyen, welche von den 6 Kanten $\overline{AP}$, $\overline{AQ}$, $\overline{AR}$, $\overline{Ap}$, $\overline{Aq}$, $\overline{Ar}$ am Urſprunge A gebildet werden.

Aber man weiſs, daſs in jedem Vieleck, mag es in einer Ebene liegen oder nicht, jede Seite der Summe der andern gleich iſt, von denen jede mit dem Coſinus des Winkels multiplicirt wird, den ſie mit der erſten macht. So erhält man folgende drey Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
x &= x' \cos x^\wedge x' + y' \cos x^\wedge y' + z' \cos x^\wedge z' \\
&\qquad - y \cos x^\wedge y - z \cos x^\wedge z \\
y &= x' \cos y^\wedge x' + y' \cos y^\wedge y' + z' \cos y^\wedge z' \\
&\qquad - x \cos y^\wedge x - z \cos y^\wedge z \\
z &= x' \cos z^\wedge x' + y' \cos z^\wedge y' + z' \cos z^\wedge z' \\
&\qquad - x \cos z^\wedge x - y \cos z^\wedge y
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (N)$$

Gleichungen, die nur die 3 alten, die 3 neuen Coordinaten und die 9 Winkel enthalten, welche unmittelbar gegeben, oder durch die vorigen Bedingungsgleichungen beſtimmt ſind.

Um das Problem der Umformung der Coordinaten in ſeiner gröſsten Allgemeinheit zu nehmen, muſs man dieſe 3 Gleichungen auflöſen, um daraus die Werthe von x, y, z zu ziehen. Nehmen wir der Kürze wegen

$$\left.\begin{array}{l} \cos x^\wedge y = b \\ \cos x^\wedge z = c \\ x' \cos x^\wedge x' + y' \cos x^\wedge y' + z' \cos x^\wedge z' = d \\ \cos y^\wedge x = e \\ \cos y^\wedge z = f \\ x' \cos y^\wedge x' + y' \cos y^\wedge y' + z' \cos y^\wedge z' = h \\ \cos z^\wedge x = i \\ \cos z^\wedge y = k \\ x' \cos z^\wedge x + y' \cos z^\wedge y' + z' \cos z^\wedge z' = m \end{array}\right\} \ldots\ldots (P)$$

ſo erhalten wir

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{chk + bgm - dgk - bh - cm + d}{cek + bgi - gk - be - ci + 1} \\ y = \dfrac{cem + gdi - chi - gm - de + h}{cek + bgi - gk - be - ci + 1} \\ z = \dfrac{dek + bhi - bem - kh - di + m}{cek + bgi - gk - be - ci + 1} \end{array}\right\} \ldots\ldots (Q)$$

69. Sucht man die 3 Winkel $x'^\wedge y'$, $x'^\wedge z'$, $y'^\wedge z'$, welche die neuen Axen mit einander machen, ſo brauchte man nur die 6 Axen, x, y, z, x', y', z' zu vieren zu betrachten, indem man immer 2 alte und 2 neue nimmt. Da von den 6 Winkeln, welche dieſe 4 Linien bilden, 5 gegeben ſind, findet ſich der 6te durch die

Formel der Aufgabe (XXI, 50.). Z. B. den Winkel $x'^\wedge y'$ findet man, wenn man die 4 Axen

$$x,\ y,\ x',\ y'$$
$$\text{oder } x,\ z,\ x',\ y'$$
$$\text{oder } y,\ z,\ x',\ y'$$

combinirt. So erhält man folgende 3 Formeln, deren jede $x'^\wedge y'$ giebt, und die man nach den Umständen auswählen kann:

$$1 - \cos x^\vee y^2 - \cos x^\wedge x'^2 - \cos y^\wedge x'^2 - \cos x'^\wedge y'^2 - \cos y^\wedge y'^2 - \cos x^\wedge y'^2$$
$$+ \cos xy^2 . \cos x'^\wedge y'^2 + \cos x^\wedge x'^2 . \cos y^\wedge y'^2 + \cos y^\wedge x'^2 . \cos x^\wedge y'^2$$
$$+ 2\cos x^\wedge y . \cos x^\wedge x' . \cos y^\wedge x' + 2\cos x^\wedge y . \cos y^\wedge y' . \cos x^\wedge y'$$
$$+ 2\cos x^\wedge x' . \cos x^\wedge y' . \cos x'^\wedge y' + 2\cos y^\wedge x' . \cos y^\wedge y' . \cos x'^\wedge y'$$
$$- 2\cos x^\wedge y . \cos y^\wedge x' . \cos y^\wedge y' . \cos x^\wedge y' - 2\cos x^\wedge y' . \cos y^\wedge x' . \cos x^\wedge y' . \cos x'^\wedge y'$$
$$- 2\cos x^\wedge x' . \cos y^\wedge x' . \cos y^\wedge y' . \cos x^\wedge y' = 0 \ \ldots . \ (\mathrm{R})$$

$$1 - \cos x^\wedge z^2 - \cos x^\wedge x'^2 - \cos z^\wedge x'^2 - \cos x'^\wedge y'^2 - \cos z^\wedge y'^2 - \cos x^\wedge y'^2$$
$$+ \cos x^\wedge z^2 . \cos x'^\wedge y'^2 + \cos x^\wedge x'^2 . \cos z^\wedge y'^2 + \cos z^\wedge x'^2 . \cos x^\wedge y'^2$$
$$+ 2\cos x^\wedge z . \cos x^\wedge x' . \cos z^\wedge x' + 2\cos x^\wedge z . \cos z^\wedge y' . \cos x^\wedge y'$$
$$+ 2\cos x^\wedge y' . \cos x^\wedge x' . x'^\wedge y' + 2\cos z^\wedge x' . \cos z^\wedge y' . \cos x'^\wedge y'$$
$$- 2\cos x^\wedge z . \cos x^\wedge x' . \cos z^\wedge y' . \cos x'^\wedge y' - \cos x^\wedge z . \cos z^\wedge x' . \cos x^\wedge y' . \cos x'^\wedge y'$$
$$- 2\cos x^\wedge x' . \cos z^\wedge x' . \cos z^\wedge y' . \cos x^\wedge y' = 0 \ \ldots . \ (\mathrm{S})$$

$$
\begin{aligned}
1 &- \cos y^\wedge z^2 - \cos y^\wedge x'^2 - \cos z^\wedge x'^2 - \cos z^\wedge y'^2 - \cos x^\wedge y'^2 \\
&- \cos y^\wedge y'^2 \\
&+ \cos y^\wedge z^2 \,.\, \cos x'^\wedge y'^2 + \cos y^\wedge x'^2 \,.\, \cos z^\wedge y^2 + \cos z^\wedge x'^2 \\
&\quad .\, \cos y^\wedge y'^2 \\
&+ 2\cos y^\wedge z \,.\, \cos y^\wedge x' \,.\, \cos z^\wedge x' + 2\cos y^\wedge z \,.\, \cos z^\wedge y' \\
&\quad .\, \cos y^\wedge y' \\
&+ 2\cos y^\wedge x' \,.\, \cos y^\wedge y' \,.\, \cos x'^\wedge y' + 2\cos z^\wedge x \,.\, \cos z^\wedge y' \\
&\quad .\, \cos x'^\wedge y' \\
&- 2\cos y^\wedge z \,.\, \cos y^\wedge x' \,.\, \cos z^\wedge y' \,.\, \cos x'^\wedge y' - 2\cos y^\wedge x' \\
&\quad .\, \cos z^\wedge x' \,.\, \cos z^\wedge y' \,.\, \cos y^\wedge y' \\
&- 2\cos y^\wedge z \,.\, \cos z^\wedge x' \,.\, \cos y^\wedge y' \,.\, \cos x'^\wedge y' = 0 \;\ldots\ldots\; (T)
\end{aligned}
$$

70. Sind die 3 erſten Coordinaten rechtwinklicht, wie man gewöhnlich annimmt, ſo hat man

$$
\begin{aligned}
\cos x^\wedge y &= 0 \\
\cos x^\wedge z &= 0 \\
\cos y^\wedge z &= 0
\end{aligned}
$$

Alle Glieder alſo der Formeln (N), die das Zeichen — haben, verſchwinden, und die Formeln verwandeln ſich in

$$
\left.
\begin{aligned}
x &= x' \,.\, \cos x^\wedge x' + y' \cos x^\wedge y' + z' \cos x^\wedge z' \\
y &= x' \cos y^\wedge x' + y' \cos y^\wedge y' + z' \cos y^\wedge z' \\
z &= x' \cos z^\wedge x' + y' \cos z^\wedge y' + z' \cos z^\wedge z'
\end{aligned}
\right\} \;\ldots\ldots\; (U)
$$

Die Bedingungsgleichungen (*K, L, M*) verwandeln ſich in

$$
\left.
\begin{aligned}
\cos x^\wedge x'^2 + \cos y^\wedge x'^2 + \cos z^\wedge x'^2 &= 1 \\
\cos x^\wedge y'^2 + \cos y^\wedge y'^2 + \cos z^\wedge y'^2 &= 1 \\
\cos x^\wedge z'^2 + \cos y^\wedge z'^2 + \cos z^\wedge z'^2 &= 1
\end{aligned}
\right\} \;\ldots\ldots\; (V)
$$

Und die Gleichungen (*R, S, T*) mit einander verbunden, und nach und nach auf die andern Winkel

kel $x'^\wedge z'$, $y'^\wedge z'$ angewandt, kommen auf die 3 folgenden zurück:

$$\left.\begin{aligned}
\cos x'^\wedge y' &= \cos x^\wedge x' \,.\, \cos x^\wedge y' + \cos y^\wedge x' \\
&\quad .\, \cos y^\wedge y' + \cos z^\wedge x' \,.\, \cos z^\wedge y' \\
\cos x'^\wedge z' &= \cos x^\wedge x' \,.\, \cos x^\wedge z' + \cos y^\wedge x' \\
&\quad .\, \cos y^\wedge z' + \cos z^\wedge x' \,.\, \cos z^\wedge y' \\
\cos y'^\wedge z' &= \cos x^\wedge y' \,.\, \cos x^\wedge z' + \cos y^\wedge y' \\
&\quad .\, \cos y^\wedge z' + \cos z^\wedge y' \,.\, \cos z^\wedge z'
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (X)$$

71. Wenn man statt der Winkel $x^\wedge y$, $x^\wedge z$, $y^\wedge z$, die Winkel kennt, welche die Ebenen Axy, Axz, Ayz, welche zwey von den von A ausgehenden Kanten enthalten, bilden, und die ich so bezeichne:

$$\overline{Axy}^\wedge\overline{Axz},\quad \overline{Axy}^\wedge\overline{Ayz},\quad \overline{Axz}^\wedge\overline{Ayz}$$

so braucht man nur die Formeln des Lemma II. zu nehmen, und man hat

$$\cos x^\wedge y = \frac{\cos \overline{Axz}^\wedge\overline{Ayz} + \cos \overline{Axy}^\wedge\overline{Axz} \,.\, \cos \overline{Axy}^\wedge\overline{Ayz}}{\sin \overline{Axy}^\wedge\overline{Axz} \,.\, \sin \overline{Axy}^\wedge\overline{Ayz}}$$

Eben solche Formeln hat man für $\cos x^\wedge z$, $\cos y^\wedge z$, die man nur in den vorigen zu substituiren braucht, um die Werthe der alten Coordinaten in Werthen der neuen, und bekannter Winkel zu haben.

Verfuch einer Theorie der Transverfalen.

1. Eine grade Linie oder eine Curve, die auf irgend eine Art ein Syftem von andern Linien, Ebenen oder krummen Oberflächen durchfchneidet, heifst mir eine Transverfale. In diefem Verfuche handle ich nur von graden und Kreis-Transverfalen.

Oft kann man aus diefer Theorie für verwickelte Aufgaben einfache und elegante Auflöfungen ziehn, fo dafs fie wohl in die gewöhnlichen Elemente der Geometrie aufgenommen zu werden verdiente.

2. Im Grunde ift diefe Theorie mit der der Coordinaten einerley. Wenn MOM' (Fig. 13.) eine Curve ift, die auf zwey rechtwinklichte Axen $\overline{AP}$, AQ, bezogen wird (den Urfprung in A gefetzt), AP, PM die Coordinaten von M find, und durch M zwifchen den Axen eine beliebige Transverfale $p\overline{M}q$ unter einem gegebenen Winkel $A\hat{p}M$ gezogen wird, fo geben die ähnlichen Dreyecke pPM, pAq

$$\overline{PM} = \overline{pM} \cdot \frac{\text{fin } P\hat{p}M}{\text{fin } p\hat{P}M}$$

$$\overline{QM} = \overline{qM} \cdot \frac{\text{fin } Q\hat{q}M}{\text{fin } q\hat{Q}M}$$

nennt man alfo

x, y die Coordinaten $\overline{AP}$, $\overline{PM}$;

x', y' die entſprechenden Theile $\overline{pM}$, $\overline{qM}$ der Transverſale;

a, b die gegebenen Winkel $P\hat{A}a$, $A\hat{p}q$,

ſo werden die vorigen Gleichungen

$$y = y' \cdot \frac{\sin b}{\sin a}$$

$$x = x' \cdot \frac{\sin (a + b)}{\sin a}$$

Man ſieht alſo, daſs, wenn man für die Coordinaten x, y, in der Gleichung der Curve MoM' dieſe Werthe ſetzt, man eine Gleichung von demſelben Grade zwiſchen x', y', d. h. zwiſchen den Theilen $\overline{Mp}$, $\overline{Mq}$ der Transverſale $\overline{pMM'q}$ erhalten wird.

So iſt die Theorie der Transverſalen eigentlich nur die Theorie der Coordinaten, welche man, ſtatt ſie einen Winkel bilden zu laſſen, auf derſelben Linie genommen hat. So vereinfacht man, weil der Grad der Gleichung nicht erhöht wird, und man den Urſprung und die Richtung der Transverſalen verändern kann, wie den Urſprung und die Richtung der Coordinaten.

Lehrſatz I.

3. Wenn die 3 Seiten eines Dreyecks oder ihre Verlängerungen von einer beliebigen Transverſale geſchnitten werden, ſo entſtehen in der Richtung jeder Seite des Dreyecks zwey durch die Transverſale gebildete Segmente von der Beſchaffenheit, daſs das Product dreyer von ihnen, die

keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, immer dem Product der 3 andern gleich ist.

Beweis.

ABC (Fig. 14, 15, 16, 17.) sey das gegebene Dreyeck, $\overline{abc}$ die Transversale in der Ebene des Dreyecks, welche die Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ in *a*, *b*, *c* schneidet, so sind die Segmente zwischen der Transversale und den Winkeln in der Richtung der Seite,

auf $\overline{AB}$ $\overline{Ac}$, $\overline{Bc}$

auf $\overline{AC}$ $\overline{Ab}$, $\overline{Cb}$

auf $\overline{BC}$ $\overline{Ba}$, $\overline{Ca}$

Man soll beweisen, dass

$$\overline{Ab} \cdot \overline{Bc} \cdot \overline{Ca} = \overline{Ac} \cdot \overline{Ba} \cdot \overline{Cb}.$$

Durch den Scheitel eines der Winkel des Dreyecks, z. B. durch *B*, ziehe man eine Parallele mit der gegenüberstehenden Seite $\overline{AC}$, welche die Transversale in *h* schneidet. Dann haben wir

$$\frac{\overline{Ab}}{\overline{Ac}} = \frac{\overline{Bh}}{\overline{Bc}}$$

$$\frac{\overline{Ca}}{\overline{Cb}} = \frac{\overline{Ba}}{\overline{Bh}}$$

multipliciren wir die Gleichung, so haben wir noch leichtere Reductionen:

$$\overline{Ab} \cdot \overline{Bc} \cdot \overline{Ca} = \overline{Ac} \cdot \overline{Ba} \cdot \overline{Cb} \; \ldots \; (A)$$

Derselbe Beweis gilt, die Transversale mag die Fläche des Dreyecks durchschneiden oder nicht.

Dieser Lehrsatz, der Grundsatz der ganzen Theorie der Transversalen kann sehr generalisirt werden,

denn er erſtreckt ſich, wie man aus den folgenden Lehrſätzen ſehen wird, auf alle Vielecke, mögen ſie in einer Ebene liegen oder nicht, ſelbſt auf ſphäriſche.

4. Die 3 Seiten des Dreyecks und die Transverſale können wie die 4 Seiten eines Vierecks *BCbc* betrachtet werden, und jede Seite dieſes Vierecks kann wieder als Transverſale betrachtet werden, ſo erhalten wir folgende 4 Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{Ab} \cdot \overline{Bc} \cdot \overline{Ca} = \overline{Ac} \cdot \overline{Ba} \cdot \overline{Cb} \\ \overline{AB} \cdot \overline{Cb} \cdot \overline{ac} = \overline{AC} \cdot \overline{Bc} \cdot \overline{ab} \\ \overline{Ac} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{ab} = \overline{AB} \cdot \overline{Ca} \cdot \overline{bc} \\ \overline{AC} \cdot \overline{Ba} \cdot \overline{bc} = \overline{Ab} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{ac} \end{array}\right\} \ldots \text{(B)}$$

Doch ſind dieſe 4 Gleichungen eigentlich nur 3 weſentlich verſchiedene, denn wenn man z. B. die 3 erſten multiplicirt, erhält man die vierte.

5. Multiplicirt man die erſte und die dritte, ſo erhält man

$$\overline{BC} \cdot \overline{Bc} \cdot \overline{bA} \cdot \overline{ba} = \overline{bC} \cdot \overline{bc} \cdot \overline{BA} \cdot \overline{Ba} \ldots \text{(C)}$$

oder

$$\frac{\overline{BC} \cdot \overline{Bc}}{\overline{bC} \cdot \overline{bc}} = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{Ba}}{\overline{bA} \cdot \overline{ba}} \ldots \text{(D)}$$

6. Eine Formel derſelben Art erhält man, wenn man 2 von den andern Gleichungen multiplicirt, und da die Punkte *B*, *C*, *b*, *c* willkührlich angenommen werden, ſo ſind dieſe Formeln auf die Figur anwendbar, die wir in der Geometrie der Stellung vollſtändiges Viereck nannten. Ein ſolches vollſtändiges Vier-

eck ist *ABFCGDA* (Fig. 18.), das aus den 3 einfachen Vierecken *ABCD*, *AFCG*, *BFDG* besteht.

Lehrsatz II.

7. Wenn alle Seiten eines ebenen Vielecks, oder deren Verlängerung von einer beliebigen Transversale geschnitten werden, so entstehen auf jeder Seite oder deren Verlängerung zwey durch die Transversale gebildete Segmente, von der Beschaffenheit, daſs das Product aller dieser Segmente, die keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, dem Producte aller andern gleich ist. Jedes dieser Producte hat so viel Factoren als das Vieleck Seiten.

Beweis.

Es sey z. B. das Fünfeck *ABCDE* (Fig. 19.) durch die Transversale $\overline{mnpqr}$ geschnitten, so ist

$$\overline{Am} \cdot \overline{Bn} \cdot \overline{Cr} \cdot \overline{Dp} \cdot \overline{Eq} = \overline{Aq} \cdot \overline{Bm} \cdot \overline{Cn} \cdot \overline{Dr} \cdot \overline{Ep}$$

Um den Satz zu beweisen, wollen wir aus einem Winkel des Vielecks, z. B. aus *A*, die Diagonalen $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ nach den andern ziehen, und diese Diagonalen, und die Seiten des Vielecks verlängern, bis die Transversale sie in *m*, *n*, *p*, *q*, *r*, *s*, *t* schneidet. Dann geben uns nach dem ersten Lehrsatze die Dreyecke *ABC*, *ACD*, *AED*

$$\overline{Am} \cdot \overline{Bn} \cdot \overline{Cs} = \overline{As} \cdot \overline{Bm} \cdot \overline{Cn}$$

$$\overline{As} \cdot \overline{Cr} \cdot \overline{Dt} = \overline{At} \cdot \overline{Cs} \cdot \overline{Dr}$$

$$\overline{At} \cdot \overline{Dp} \cdot \overline{Eq} = \overline{Aq} \cdot \overline{Dt} \cdot \overline{Ep}$$

multipliciren und reduciren wir, so kommt

$$\overline{Am}.\overline{Bn}.\overline{Cr}.\overline{Dp}.\overline{Eq} = \overline{Aq}.\overline{Bm}.\overline{Cn}.\overline{Dr}.\overline{Ep}\ldots(A)$$

Diefs Theorem generalisirt das vorige und ist nur ein besonderer Fall vom folgenden.

Lehrsatz III.

8. Wenn alle Seiten eines Vielecks, das nicht in einer Ebene liegt, oder ihre Verlängerungen, von einer Transversalebene geschnitten werden, so bildet diese Transversalebene auf jeder Seite, oder deren Verlängerung zwey Segmente von der Beschaffenheit, dafs das Product aller dieser Segmente, die keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, dem Producte der übrigen gleich ist, wo jedes Product auch so viel Factoren hat, als das Vieleck Seiten.

Beweis.

Wenn man *mnpqrst* (Fig. 19.) als die Projection der Transversalebene auf eine ihr senkrechte Ebene betrachtet, so ist die Schlufsfolge ganz dieselbe, wie beym vorigen Lehrsatz, und man findet eben so

$$\overline{Am}.\overline{Bn}.\overline{Cr}.\overline{Dp}.\overline{Eq} = \overline{Aq}.\overline{Bm}.\overline{Cn}.\overline{Dr}.\overline{Ep}\ldots(A)$$

man mufs bemerken, dafs in dieser Formel $\overline{Am}$, $\overline{Bn}$, u. f. w. die Segmente selbst auf den Seiten des Vielecks, und nicht ihre Projectionen bedeuten.

Der folgende Satz zeigt, dafs der Satz auch auf den Fall sich erstreckt, wo die Transversale eine Kreislinie ist.

Lehrsatz IV.

9. Wenn alle Seiten eines ebenen Vielecks von einer beliebigen Kreis-Transversale geschnitten werden, so bestimmt dieser Kreis, da er jede Seite in 2 Punkten schneidet, 4 Segmente, zwischen diesen Punkten und den Winkeln, die die Seite begränzen, und das Product der einen Hälfte dieser Segmente, ist gleich dem Product der andern Hälfte, wenn man sie alle so wählt, daſs in einem Product keine zusammenkommen, die einen Punkt des Kreises zum gemeinschaftlichen Endpunct haben.

Beweis.

Es wird genug seyn, diesen Satz für das Dreyeck zu beweisen, da derselbe Beweis für jedes andere Vieleck gilt. Es sey also ABC (Fig. 20) das gegebene Dreyeck; a, a', b, b', c, c' seyen die Punkte, wo der Kreis die Seiten schneidet. Man soll beweisen, daſs

$$\overline{Ab}.\overline{Ab'}.\overline{Bc}.\overline{Bc'}.\overline{Ca}.\overline{Ca'} = \overline{Ac}.\overline{Ac'}.\overline{Ba}.\overline{Ba'}.\overline{Cb}.\overline{Cb'} \quad \ldots\ldots \text{(B)}$$

Aus den Anfangsgründen der Geometrie hat man

$$\overline{Ab}.\overline{Ab'} = \overline{Ac}.\overline{Ac'}$$

$$\overline{Bc}.\overline{Bc'} = \overline{Ba}.\overline{Ba'}$$

$$\overline{Ca}.\overline{Ca'} = \overline{Cb}.\overline{Cb'}$$

multiplicirt man diese 3 Gleichungen, so erhält man die Formel (A).

10. Man sieht leicht, daſs der Beweis selbst anwendbar ist, wenn das Vieleck nicht in einer Ebene liegt, nur muſs man dann annehmen, daſs es von einer Kugeloberfläche geschnitten wird, die die Transversalebene des 3ten Lehrsatzes ersetzt.

Da die Ellipse als Projection des Kreises betrachtet werden kann, wendet man leicht den vorigen Satz auf sie an, weil die Projectionen der Theile einer Linie in demselben Verhältniſs stehen, als diese Linie selbst. Da nun das Verhältniſs der beyden Glieder der Gleichung (A) = 1 für den Kreis ist, muſs es auch = 1 für die Ellipse bleiben.

Eben so findet dieser Satz seine Anwendung auf alle andere Kegelschnitte, und wenn das Vieleck nicht in einer Ebene liegt, auf die Oberflächen, die durch Umdrehung dieser Curven um ihre Axen entstehen.

Der Satz kann noch mehr generalisirt werden, und erstreckt sich dann auf alle geometrische Curven, und alle Oberflächen, deren Durchschnitte mit einer Ebene geometrische Curven sind. Da ich aber hier nur mit graden und Kreis-Transversalen mich beschäftige, so beschränke ich mich, Gegenstände anzuzeigen, über die man meine Geometrie der Stellung nachschlagen kann.

Lehrsatz V.

11. Wenn man aus einem Punkte in der Ebene eines Dreyecks, auf jede Seite eine Transversale zieht, die durch den gegen-

überſtehenden Winkel geht, ſo erhält man auf jeder Seite 2 Segmente von der Beſchaffenheit, daſs das Product dreyer, die keinen gemeinſchaftlichen Endpunkt haben, dem Product der 3 andern gleich iſt.

Beweis.

Es ſey ABC (Fig. 21, 22.) das Dreyeck, D der Punkt, $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$, $\overline{Cc}$ ſeyen die Transverſalen, ſo ſoll man beweiſen, daſs

$$\overline{Ab} \cdot \overline{Bc} \cdot \overline{Ca} = \overline{Ac} \cdot \overline{Ba} \cdot \overline{Cb} \; \ldots \; (A)$$

Die beyden Dreyecke AaB, AaC, durch die Transverſalen Cc, Bb, geſchnitten, geben nach dem erſten Lehrſatz:

$$\overline{Ac} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{aD} = \overline{AD} \cdot \overline{Bc} \cdot Ac$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{aB} \cdot \overline{Cb} = \overline{aD} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{Ab}$$

multiplicirt man, ſo erhält man die Formel (A).

Es iſt, wie man ſieht, einerley, ob D innerhalb oder auſserhalb des Dreyecks liegt.

Lehrſatz VI.

12. In jedem vollſtändigen Viereck wird jede ſeiner 3 Diagonalen, von den beyden andern zu proportionalen Segmenten geſchnitten.

Es ſey $ABFCGDA$ (Fig. 18.) das vollſtändige Viereck, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{FG}$ ſeyen die 3 Diagonalen, die ſich in l, k, h ſchneiden, man ſoll beweiſen, daſs eine, z. B. $\overline{AC}$, in l, und h ſo geſchnitten wird, daſs

$$\frac{\overline{Al}}{\overline{Cl}} = \frac{\overline{Ah}}{\overline{Ch}}$$

Hierzu wollen wir das Dreyeck ABC betrachten, dessen Scheitelpunkte 3 von denen des einfachen Vierecks $ABCD$ sind, dessen Diagonale $\overline{AC}$ ist. Der vorige Satz giebt uns

$$\overline{Al}\,.\,\overline{CG}\,.\,\overline{BF} = \overline{Cl}\,.\,\overline{BG}\,.\,AF.$$

Da dasselbe Dreyeck auch von der Transversale $\overline{KFG}$ geschnitten wird, so giebt der erste Lehrsatz:

$$\overline{AF}\,.\,\overline{Ch}\,.\,\overline{BG} = \overline{BF}\,.\,\overline{Ah}\,.\,\overline{CG}$$

multipliciren wir, so entsteht

$$\overline{Al}\,.\,\overline{Ch} = \overline{Ah}\,.\,\overline{Cl}\,\ldots\,(A)$$

oder

$$\frac{\overline{Al}}{\overline{Cl}} = \frac{\overline{Ah}}{\overline{Cl}}\,\ldots\,(B)$$

Eben so beweiset man für die andern Diagonalen, dass

$$\frac{\overline{Bl}}{\overline{Dl}} = \frac{\overline{Bk}}{\overline{Dk}}$$

$$\frac{\overline{Fk}}{\overline{Gk}} = \frac{\overline{Fh}}{\overline{Gh}}$$

13. Zieht man durch den Punkt k eine neue Transversale $kB'l'D'$ die die Linien $\overline{AF}$, $\overline{Ah}$, $\overline{AG}$ in B', l', D' schneidet, so hat man

$$\frac{\overline{B'l'}}{\overline{D'l'}} = \frac{\overline{B'k}}{\overline{D'k}}\,\ldots\,(C)$$

Denn wenn man sich die Linien $\overline{GB'}$, $\overline{FD'}$ denkt, so bilden sie mit $\overline{AB'}$, $\overline{AD'}$ ein neues Viereck $AB'C'D'$

welches dieselben Eigenschaften haben wird, als $ABCD$. Nun sind $\overline{B'D'}$ und $\overline{FG}$ zwey seiner Diagonalen, also muss $\overline{FG}$ in den beyden andern in proportionalen Segmenten von den beyden andern Diagonalon geschnitten werden. Da nun eine dieser Diagonalen durch k, die andere durch h geht, so fällt diese andere Diagonale der Richtung nach in $\overline{AC}$, d. h. der Winkel C' des neuen Vierecks fällt auf $\overline{AC}$, man hat also nach dem Lehrsatze die Formel (C).

Da sich der Punkt C' auf $\overline{AC}$ befindet, so muss es einerley seyn, welche Lage auch die Transversale $\overline{kB'D'}$ haben mag. Die Linie $\overline{Ah}$ ist also der Ort aller Punkte C, C', die aus dem Durchschnitte der Linien, von F, G, nach D', B' gezogen, entstehen.

Lehrsatz VII.

14. Wenn eine beliebige Linie $\overline{BD}$, in den Punkten b, d, in proportionale Segmente geschnitten wird, und man aus einem andern Punkte des Raumes A, nach den 4 Theilungspunkten B, D, b, d, die graden Linien $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{Ab}$, $\overline{Ad}$ zieht, so wird jede andere Transversale $\overline{B'D'}$ zwischen $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ gezogen, wie die erste $\overline{BD}$, auch in proportionale Segmente $\overline{Ab}$, $\overline{Ad}$ getheilt.

Beweis.

Wir haben (Fig. 23.) nach der Annahme

$$\frac{\overline{Bb}}{\overline{Bd}} = \frac{\overline{Db}}{\overline{Dd}}.$$

nun ist

$$\overline{Bb} = \overline{AB} \cdot \frac{\sin B\hat{A}b}{\sin A\hat{b}B}$$

$$\overline{Bd} = \overline{AB} \frac{\sin B\hat{A}d}{\sin A\hat{d}B}$$

$$\overline{Db} = \overline{AD} \frac{\sin D\hat{A}b}{\sin A\hat{b}D}$$

$$\overline{Dd} = \overline{AD} \frac{\sin D\hat{A}d}{\sin A\hat{d}D}$$

substituirt man diese Werthe und reducirt, so kommt

$$\frac{\sin B\hat{A}b}{\sin B\hat{A}d} = \frac{\sin D\hat{A}b}{\sin D\hat{A}d} \dots\dots (A)$$

Wenn nun diess Verhältniss zwischen den 4 Winkeln statt findet, so muss die Linie $\overline{BD}$ nothwendigerweise in b, d, in proportionale Segmente getheilt werden, weil man sonst, wenn diess nicht der Fall wäre, den Punkt d näher oder weiter von D nehmen müsste, indem B, b, D dieselben blieben. Aber dann wäre das Verhältniss der Winkel nicht mehr dasselbe. Da man es nun gegeben annimmt, so wird $\overline{BD}$, in B und D, in proportionale Segmente getheilt.

Dasselbe gilt von jeder andern Linie $\overline{B'D'}$ u. s. w.

15. Der Beweis besteht aus zwey Theilen, die zwey merkwürdige Sätze bilden. Der erste:

Wenn eine Linie BD, in b, d, in proportionale Segmente getheilt ist, und man aus einem Punkte A des Raumes

die 4 Linien $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{Ab}$, $\overline{Ad}$ zieht, so hat man

$$\frac{\sin B\hat{A}b}{\sin B\hat{A}d} = \frac{\sin D\hat{A}b}{\sin D\hat{A}d} \quad \ldots\ldots (A)$$

zweytens:

Wenn 4 Linien aus einem Punkte A ausgehen, und in derselben Ebene gezogen, 4 Winkel bilden, unter denen das eben angeführte Verhältniss besteht, so wird jede andere Linie wie $\overline{BD}$ oder $\overline{B'D'}$, die zwischen den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ gezogen ist, von den beyden andern $\overline{Ab}$, $\overline{Ad}$, in proportionale Segmente getheilt.

16. Aus $\frac{\overline{Bb}}{\overline{Bd}} = \frac{\overline{Db}}{\overline{Dd}}$ folgt

$$\frac{\overline{Dd}}{\overline{Bd}} = \frac{\overline{Db}}{\overline{Bb}} \quad \ldots\ldots (B)$$

d. h. ist eine Linie $\overline{BD}$ in proportionale Segmente in den Punkten b, d, getheilt: so ist umgekehrt $\overline{db}$ in B, D, eben so getheilt. Also auch

$$\frac{\sin b\hat{A}D}{\sin d\hat{A}B} = \frac{\sin b\hat{A}D}{\sin b\hat{A}B} \quad \ldots\ldots (C)$$

17. Wir haben aus (13) gesehen, dass die Linie $\overline{B'D'}$, zwischen $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ gezogen, und durch k gehend, in k und l in proportionale Segmente getheilt wird. Wir können jetzt den Satz generalisiren, denn wenn man $\overline{Ak}$ zieht, und durch o einen Punkt

dieser Linie die Transversale $\overline{ompn}$, so wird $\overline{mn}$ in proportionale Segmente getheilt, d. h. man hat

$$\frac{\overline{mo}}{\overline{mp}} = \frac{\overline{no}}{\overline{np}} \quad \ldots\ldots \quad (D)$$

was aus dem Lehrsatz VII schon evident ist, weil die Linie $\overline{FG}$, zwischen denselben Linien $\overline{AF}$, $\overline{AG}$, enthalten, welche die Linie $\overline{mn}$ begränzen, in proportionale Segmente von $\overline{Ak}$, $\overline{Ah}$ geschnitten wird.

Lehrsatz VIII.

18. **Schneidet man ein beliebiges einfaches Viereck durch eine Transversale, so wird der Theil der Transversale, der zwischen den Diagonalen liegt, in proportionale Segmente von den beyden Linien getheilt, die man aus dem Durchschnittspunkt der Diagonalen, zu den beyden Punkten zieht, wo die gegenüberstehenden Seiten des Vierecks zusammenflossen.**

Beweis.

Wenn $ABCD$ (Fig. 24.) das Viereck ist, so soll man beweisen, dass $\overline{mn}$ in p, q in dem verlangten Verhältniss geschnitten werde, d. h. dass

$$\frac{\overline{mp}}{\overline{mq}} = \frac{\overline{np}}{\overline{nq}}$$

Die 3 Diagonalen des vollständigen Vierecks $GDAKBCG$ sind $\overline{KG}$, $\overline{CD}$, $\overline{AB}$, welche alle nach dem 6ten Lehrsatze so geschnitten sind. Wendet man diesen Grundsatz auf die Diagonale $\overline{AB}$ an, so findet

man, daſs ſie in den Punkten o, F, von den beyden andern Linien geſchnitten wird, die von K ausgehen, alſo wird nach dem VII. Lehrſatz jede andere Transverſale wie $\overline{mn}$, die zwiſchen $\overline{KA}$, $\overline{KB}$ liegt, durch $\overline{KG}$, $\overline{KF}$ in proportionale Segmente getheilt, d. h. man hat

$$\frac{\overline{mp}}{\overline{mq}} = \frac{\overline{np}}{\overline{nq}} \quad \ldots \quad (A)$$

Lehrſatz IX.

19. Wenn eine Linie der gemeinſchaftliche Durchſchnitt von 4 verſchiedenen Ebenen iſt, und man willkührlich zwiſchen 2 dieſer Ebenen eine Transverſale gezogen hat, und dieſe Transverſale von den andern beyden Ebenen in proportionale Segmente getheilt wird, ſo wird jede andere zwiſchen den beyden erſten gezogene Transverſale von den beyden letzten eben ſo getheilt.

Beweis.

Wir wollen annehmen, das ganze Syſtem ſey auf eine Ebene projicirt, die ſenkrecht auf der Linie ſteht, welche den 4 gegebenen Ebenen zum Durchſchnitt dient. A (Fig. 25.) ſey die Projection des Durchſchnitts, $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{Ab}$, $\overline{Ad}$ die der Ebenen, $\overline{BD}$ die Linie, die zwiſchen den Ebenen $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ gezogen, und in b, d, in proportionale Segmente getheilt iſt, endlich $\overline{B'D'}$ irgend eine andere Transverſale zwiſchen den Ebenen $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, welche von den andern

andern in b', d' geſchnitten wird. Man ſoll beweiſen, daſs

$$\frac{\overline{B'b'}}{\overline{Bd'}} = \frac{\overline{Db'}}{\overline{Dd'}}$$

Ich ziehe die Linie $\overline{B'd}$, und führe durch $\overline{Bd}$, $\overline{Bd'}$, eine Ebene, welche die Linie A irgendwo ſchneidet. Wo dieſer Durchſchnitt auch liegen mag, ſo wird $B'D''$ (14) in b'', d in proportionale Segmente getheilt. Führen wir nun durch $\overline{B'd}$, $\overline{B'd'}$ eine neue Ebene, die auch A irgendwo ſchneiden wird, ſo wird, wo dieſer Durchſchnitt auch liegt, da $\overline{B'D''}$ in proportionale Segmente getheilt iſt, $\overline{B'D'}$ gleichfalls in b', d' ſo getheilt werden, alſo

$$\frac{\overline{B'b'}}{\overline{Bd'}} = \frac{\overline{D'b'}}{\overline{D'd'}} \quad \ldots . \text{(A)}$$

20. Daraus folgt, daſs, wenn 4 Ebenen AB, Ab, AD, Ad, einen gemeinſchaftlichen Durchſchnitt A haben, das Verhältniſs der Winkel, die ſie bilden, folgendes iſt:

$$\frac{\sin B\hat{A}b}{\sin B\hat{A}d} = \frac{\sin D\hat{A}b}{\sin D\hat{A}d}$$

Daſſelbe Verhältniſs beſteht zwiſchen den Winkeln, die von den Durchſchnitten dieſer 4 Ebenen mit einem 5ten gebildet werden.

Lehrſatz X.

21. Wenn man aus einem Punkte A auſserhalb einer Linie $\overline{BK}$ (Fig. 26.) zu dieſer Linie ſoviel andere Linien $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ zieht, als man will, und nachdem man

aus K eine Transverſale $\overline{Kb}$ gezogen hat, die alle dieſe Linien, von A an gerechnet, in b, c, d, e ſchneidet, dann die Diagonalen $\overline{Bc}$, $\overline{Cb}$, $\overline{Cd}$, $\overline{Dc}$ u. ſ. w. aller Vierecke $BCcb$, $CDdc$, $BDdb$, u. ſ. w. zieht, ſo ſind alle Durchſchnittspunkte der Diagonalen deſſelben Vierecks als m, n, p, u. ſ. w. in einer und derſelben graden Linie, die auch durch K geht.

Beweis.

Wir wollen z. B. den Punkt m nehmen; die Linie $\overline{Km}$ iſt eine Diagonale des vollſtändigen Vierecks $KcbmBCK$, die andern beyden ſind $\overline{Bb}$, $\overline{Cc}$. Nach dem 6ten Lehrſatz wird jede von den beyden andern in proportionalen Segmenten geſchnitten; wenn alſo $\overline{Km}$, $\overline{Bb}$ in K' ſchneidet, ſo ſchneiden die Punkte A und K' dieſe Linie Bb im angeführten Verhältniſs. Es wird alſo auch nach Lehrſatz 7 jede der andern Linien $\overline{Cc}$, $\overline{Dd}$, $\overline{Ee}$, von $\overline{Km}$ ſo geſchnitten.

Aus demſelben Grunde muſs $\overline{Kn}$ die Linien $\overline{Bb}$, $\overline{Cc}$, $\overline{Dd}$, $\overline{Ee}$ ſo ſchneiden, u. ſ. w.

Alſo bilden alle Linien $\overline{Km}$, $\overline{Kn}$, $\overline{Kp}$ nur eine und dieſelbe Linie, die von K ausgeht.

Lehrſatz XI.

22. Wenn aus einem Punkte A auſſerhalb einer Ebene, welche durch die Linie $\overline{BK}$ vorgeſtellt wird, zu dieſer Ebene ſo viele Linien $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ als man will,

gezogen werden, und man auſserdem eine Transverſal - Ebene führt, (vorgeſtellt durch $\overline{bK}$, deren Durchſchnitt mit der erſten, K,) welche die Linien von A, zu b, c, d, e gezogen, ſchneidet, dann in jedem ſo entſtandenen Viereck $BCcb$, $CDdc$, u. ſ. w. die beyden Diagonalen $\overline{Bc}$, $\overline{Cb}$, $\overline{Cd}$, $\overline{Dc}$ u. ſ. w. zieht; ſo ſind alle Durchſchnittspunkte m, n, p, u. ſ. w. dieſer Diagonalen in einer und derſelben Ebene, die auch durch die Durchſchnittslinie K, der Ebenen BK, bK geht.

Beweis.

Wir wollen durch K und m eine Ebene führen, welche die Ebene, welche $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ enthält, in $\overline{Km}$ ſchneiden ſoll; dann folgt aus dem 6ten Lehrſatz, daſs, wenn K' der Durchſchnittspunkt dieſer Linie $\overline{Km}$ mit $\overline{Bb}$ iſt, $\overline{Bb}$ in den Punkten A, K' in proportionale Segmente getheilt wird, alſo werden nach dem 8ten Lehrſatz alle andere Linien $\overline{Cc}$, $\overline{Dd}$, $\overline{Ee}$ zwiſchen die Ebenen KB, Kb, eben ſo durch die Ebene $\overline{KK'}$ und den Punkt A getheilt.

Aus demſelben Grunde ſchneidet die Ebene, welche durch K und n geht, mit dem Punkte A, alle Linien $\overline{Bb}$, $\overline{Cc}$, $\overline{Dd}$, $\overline{Ee}$ eben ſo u. ſ. w.

Alſo ſind die Ebenen, die durch K, und m, n, p, gehen, nur eine und dieſelbe Ebene.

Lehrsatz XII.

23. Wenn man auf jeder Kante einer dreyeckichten Pyramide *ABCD*, die von *A* ausgehen, willkührlich die Punkte *m*, *n*, *p*, nimmt (Fig. 27.), um das Dreyeck *mnp* zu bilden, und nachdem man die Diagonalen $\overline{Bn}$, $\overline{Cm}$, $\overline{Cp}$, $\overline{Dn}$, $\overline{Dm}$, $\overline{Bp}$ gezogen hat, noch durch *A*, und die Durchschnittspunkte *D'*, *B'*, *C'*, die Transversalen $\overline{Aa}$, $\overline{Aa'}$, $\overline{Aa''}$ zieht, so werden

1) Die Transversalen $\overline{Da}$, $\overline{Ba'}$ $\overline{Ca''}$ sich in einem und demselben Punkt *A'* der Grundfläche schneiden;

2) Die 4 Transversalen $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ $\overline{DD'}$, in einem und demselben Punkt *K'* des Raums;

3) Die Ebene, welche durch *B'C'*, *D'*, geht, und die beyden andern Ebenen *BCD*, *bcd*, werden alle 3 einen gemeinschaftlichen Durchschnitt haben.

Beweis.

Nach dem fünften Lehrsatz geben die 3 Dreyecke *ABC*, *ACD*, *ABD*:

$$\overline{Am} \cdot \overline{Ba} \cdot \overline{Cn} = \overline{An} \cdot \overline{Bm} \cdot \overline{Ca}$$

$$\overline{An} \cdot \overline{Ca'} \cdot \overline{Dp} = \overline{Ap} \cdot \overline{Cn} \cdot \overline{Da'}$$

$$\overline{Ap} \cdot \overline{Da''} \cdot \overline{Bm} = \overline{Am} \cdot \overline{Dp} \cdot \overline{Ba''}$$

Multiplicirt man, so kommt

$$\overline{Ba} \cdot \overline{Ca'} \cdot \overline{Da''} = \overline{Ca} \cdot \overline{Da'} \cdot \overline{Ba''}$$

woraus nach demſelben Lehrſatze folgt, daſs die 3 Transverſalen $\overline{Da}$, $\overline{Ba'}$, $\overline{Ca''}$ ſich in einem Punkte A' ſchneiden.

Ziehen wir nun $\overline{AA'}$, ſo iſt dieſe Linie zugleich in den Ebenen ADa, ABa', ACa'. Da nun $\overline{Aa}$, durch D' den Durchſchnittspunkt von $\overline{Cm}$, $\overline{Bn}$ geht, ſo iſt $\overline{DD'}$ in derſelben Ebene, die $\overline{AA'}$ enthält, und wird alſo AA' ſchneiden. Eben ſo beweiſt man, daſs $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ ſich zu zweyen ſchneiden. Alſo ſchneidet $\overline{CC'}$ z. B. die nicht in der Ebene ADa iſt, welche $\overline{AA'}$, $\overline{DD'}$ enthält, doch beyde, welches nur geſchehen kann, indem ſie durch ihren Durchſchnittspunkt geht. Alſo ſchneiden $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ ſich in einem Punkte.

Wenn wir durch B', den Durchſchnittspunkt von $\overline{Cp}$, $\overline{Dn}$, und den Durchſchnittspunkt von $\overline{CD}$, $\overline{np}$ eine Transverſale ziehen, ſo wird ſie (12.) mit dem Punkte $\overline{A}$, $\overline{Cn}$, $\overline{Dp}$ in proportionale Segmente theilen. Eben ſo theilt die Transverſale durch C', und den Durchſchnittspunkt von $\overline{Bp}$, $\overline{Dm}$, die Linien $\overline{Bm}$, $\overline{Dp}$. Alſo geht die Ebene, die B', C', und den Punkt enthält, wo $\overline{Dp}$ von A und den erwähnten Transverſalen in proportionale Segmente getheilt wird, durch die Durchſchnittspunkte der Linien $\overline{CD}$ und $\overline{np}$, $\overline{BD}$ und $\overline{mp}$, und folglich durch den gemeinſchaftlichen Durchſchnitt der Ebenen BCD, mnp. Man beweiſet eben ſo, daſs D' in derſelben Ebene liegt, alſo hat die Ebene die B', C', D' eine und dieſelbe Durchſchnittslinie mit den Ebenen BCD, mnp.

Man kann noch bemerken, daſs derſelbe Beweis ſtatt findet, ohne Unterſchied, ob *m*, *n*, *p* auf den Kanten ſelbſt oder auf deren Verlängerungen liegen. So kann man *A*, *B*, *C*, *D*, *K* als 5 willkührlich im Raume angenommene Punkte betrachten, auf die man, wenn man immer 4 davon nimmt, alles anwenden kann, was von der Pyramide *ABCD* geſagt iſt.

Die Punkte α', β', γ', wo ſich die correſpondirenden Seiten:

$$\overline{Bc},\ \overline{mn}$$
$$\overline{BD},\ \overline{mp}$$
$$\overline{CD},\ \overline{np}$$

der Dreyecke *BCD*, *mnp* ſchneiden, ſind offenbar alle 3 im Durchſchnitte der beyden Ebenen, und folglich in einer graden Linie, welche Winkel auch immer $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ machen. Nähert ſich alſo *AC* unmerklich der Ebene *ABD*, bis ſie hineinfällt, ſo hören α', β', γ' darum nicht auf in grader Linie zu ſeyn. Daraus folgt im Allgemeinen, wenn man aus einem beliebigen Punkte *A*, in einer Ebene 3 Linien $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ zieht, und zwey Dreyecke *BCD*, *mnp* bildet, von denen jedes ſeine 3 Winkel auf dieſen 3 Linien, die von *A* ausgehen, oder auf ihren Verlängerungen hat, ſo werden die 3 Durchſchnittspunkte α', β', γ', der correſpondirenden Seiten dieſer Dreyecke immer in grader Linie ſeyn.

Eben ſo müſſen, wenn man die 3 Kanten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ in einer Ebene annimmt, und die Diagonalen $\overline{Bn}$, $\overline{Cm}$, $\overline{Cp}$, $\overline{Dn}$, $\overline{Bp}$, $\overline{Dm}$ zieht, deren Durch-

schnittspunkte D', B', C' sind, die 3 Linien $\overline{DD'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, sich alle in einem Punkte K schneiden.

24. Die Theorie der graden Transversalen, welche wir entwickelt haben, erstreckt sich leicht auf die sphärischen Transversalen, d. h. alles, was wir von ebenen Vielecken gesagt haben, erstreckt sich auf Vielecke, die durch Bogen größter Kreise auf der Oberfläche einer Kugel gebildet werden, wenn man die Sinus der Bogen für die Seiten des ebenen Vielecks setzt.

Wird z. B. ein sphärisches Dreyeck ABC (Fig. 29.) durch einen Transversalbogen abc geschnitten, so wird jeder Bogen AB, AC, BC in 2 Segmente getheilt, und das Product der Sinus dreyer dieser Segmente, die keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, wird dem Product der 3 andern gleich seyn, d. h.

$$\sin Ac . \sin Ba . \sin Cb = \sin Ab . \sin Bc . \sin Ca \ldots (A)$$

Man hat nämlich aus den sphärischen Dreyecken Acb, Bac, Cab

$$\frac{\sin Ac}{\sin Ab} = \frac{\sin b}{\sin c}$$

$$\frac{\sin Ba}{\sin Bc} = \frac{\sin c}{\sin a}$$

$$\frac{\sin Cb}{\sin Ca} = \frac{\sin a}{\sin b}$$

Multiplicirt man diese 3 Gleichungen, so kommt man auf die Gleichung (A).

25. Eben so wenn man in einem sphärischen Dreyeck ABC einen Punkt D nimmt, und durch ihre

3 Bogen gröſster Kreiſe *Aa*, *Bb*, *Cc* zieht, die durch die Winkel gehen, ſo hat man (Fig. 30.)

$$\sin Ac \cdot \sin Ba \cdot \sin Cb = \sin Ab \cdot \sin Ca \cdot \sin Bc \;\ldots\; \text{(B)}$$

26. Eben ſo wenn man ein ſphäriſches Viereck *ABCD* hat, und die 3 Diagonalen *AB*, *CD*, *FG* (Fig. 31.) zieht, ſo wird jede dieſer Diagonalen von den beyden andern in Segmente getheilt, deren Sinus proportional ſind, d. h. wenn man z. B. durch *l*, *h*, die Durchſchnittspunkte der Diagonale *AC*, und der beyden andern *BD*, *GF* bezeichnet, ſo hat man

$$\frac{\sin Al}{\sin Ah} = \frac{\sin Cl}{\sin Ch} \;\ldots\; \text{(C)}$$

Ich glaube nicht, daſs es, nach dem, was über grade Transverſalen geſagt iſt, nöthig ſeyn wird, dieſen Satz zu beweiſen, oder die Analogie beyder Arten der Transverſalen weiter zu treiben, mag der Leſer, wenn er es der Mühe werth hält, ſeinen Scharfſinn daran üben.

Schluſs.

27. Dieſs ſind die allgemeinen Grundzüge der Theorie der Transverſalen, ich werde jetzt nur noch einige Anwendungen, deren ſie fähig iſt, andeuten.

Es ſeyen *A*, *B*, *C*, (Fig. 32.) die Mittelpunkte dreyer Kreiſe, die in einer Ebene beſchrieben ſind. Wir wollen uns Linien vorſtellen, die dieſe Kreiſe zu zweyen äuſserlich berühren; *a*, *b*, *c* ſeyen die Punkte, wo dieſe Tangente die verlängerten Linien durch die Mittelpunkte ſchneiden, d. h. *a* iſt der Punkt, wo die Linie *BC* von der äuſsern Tangente der Kreiſe

B, C geſchnitten wird u. ſ. w., dann werden die Punkte *a, b, c* in einer graden Linie liegen, wie Monge aus blos geometriſchen Betrachtungen, die ſich auf die Geometrie dreyer Dimenſionen beziehen, gefunden hat. Denn wenn wir *A, B, C* den Halbmeſſer der vorhin ſo bezeichneten Kreiſe nennen, ſo müſſen die Entfernungen $\overline{Ba}$, $\overline{Ca}$, den Halbmeſſern *B, C* porportional ſeyn u. ſ. w. Wir haben alſo:

$$\frac{A}{B} = \frac{\overline{Ac}}{\overline{Bc}}$$

$$\frac{B}{C} = \frac{\overline{Ba}}{\overline{Ca}}$$

$$\frac{C}{A} = \frac{\overline{Cb}}{\overline{Ab}}$$

Multiplicirt man dieſe 3 Gleichungen, ſo kommt

$$\overline{Ab} \,.\, \overline{Bc} \,.\, \overline{Ca} = \overline{Ac} \,.\, \overline{Ba} \,.\, \overline{Cb}$$

was nach dem erſten Lehrſatze nicht Statt haben kann, wenn nicht *a, b, c* in einer graden Linie liegen.

Wir wollen jetzt die innern Tangenten betrachten. Es ſeyen *a′, b′, c′* die Punkte, wo dieſe Tangenten die Linien durch die Mittelpunkte ſchneiden, dann haben wir wie vorhin:

$$\frac{A}{B} = \frac{\overline{Ac'}}{\overline{Bc'}}$$

$$\frac{B}{C} = \frac{\overline{Ba'}}{\overline{Ca'}}$$

$$\frac{C}{A} = \frac{\overline{Cb'}}{\overline{Ab'}}.$$

und daraus

$$\overline{Ab'} \cdot \overline{Bc'} \cdot \overline{Ca'} = \overline{Ac'} \cdot \overline{Ba'} \cdot \overline{Cb'}$$

was nach dem 5ten Lehrſatze beweiſet, daſs, wenn man die 3 Transverſalen $\overline{Aa'}$, $\overline{Bb'}$, $\overline{Cc'}$ zieht, ſie ſich alle in einem Punkte *D* durchſchneiden werden.

Weil wir haben

$$\frac{A}{B} = \frac{\overline{Ac}}{\overline{Bc}}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\overline{Ac'}}{\overline{Bc'}}$$

ſo haben wir auch

$$\frac{\overline{Ac}}{\overline{Bc}} = \frac{\overline{Ac'}}{\overline{Bc'}}$$

Die Linie *AB* iſt alſo durch die Punkte *c*, *c'* in proportionale Segmente getheilt, was nach dem 6ten Lehrſatze beweiſet, daſs die Punkte *a'*, *b'*, *c'* in grader Linie liegen, aus demſelben Grunde auch die Punkte *c'*, *a'*, *b*, und *c'*, *b'*, *a*.

Man kann dieſelbe Theorie auf den Fall anwenden, wo die 3 gegebenen Kreiſe ſich auf der Oberfläche einer Kugel befänden, man braucht dann nur auf Bogen gröſster Kreiſe anzuwenden, was wir von graden Linien geſagt haben.

28. Es ſeyen *A*, *B*, *C*, *D* die Mittelpunkte von 4 Kugeln. Wir wollen uns vorſtellen, dieſe Kugeln ſeyen äuſserlich zu zweyen von berührenden coniſchen Oberflächen eingehüllt, ſo entſtehen daraus 6 verſchiedene Kegel. Die Spitzen dieſer 6 Kegel *m*, *n*, *p*, *q*, *r*, *s*, werden in derſelben Oberfläche liegen.

Denn wenn A, B, C, D die Halbmeſſer der ſo benannten 4 Kugeln bedeuten, ſo haben wir offenbar folgende Gleichungen:

$$\frac{A}{B} = \frac{\overline{Am}}{\overline{Bm}}$$

$$\frac{B}{C} = \frac{\overline{Bn}}{\overline{Cn}}$$

$$\frac{C}{D} = \frac{\overline{Cp}}{\overline{Dp}}$$

$$\frac{D}{A} = \frac{\overline{Dq}}{\overline{Aq}}$$

Multiplicirt man, ſo kommt

$$\overline{Am} \, . \, \overline{Bn} \, . \, \overline{Cp} \, . \, \overline{Dq} = \overline{Aq} \, . \, \overline{Bm} \, . \, \overline{Cn} \, . \, \overline{Dp}$$

woraus nach dem dritten Lehrſatze folgt, daſs die 4 Punkte m, n, p, q, die die Segmente der Seiten des Vierecks $ABCD$, das nicht in einer Ebene liegt, begränzen, in derſelben Ebene ſind. Derſelbe Beweis wird auf alle Punkte m, n, p, q, r, s, zu vieren genommen, angewendet. Alle dieſe Punkte liegen alſo in einer Ebene, und noch mehr, beliebige 3 von ihnen liegen in einer graden Linie, weil es z. B. offenbar iſt, daſs die 3 Punkte m, n, r, im Durchſchnitt der ebenerwähnten allgemeinen Ebene, und der Ebene des Dreyecks ABC liegen.

Wir wollen jetzt die Punkte m', n', p', q', r', s' betrachten, die Scheitelpunkte der Kegel, die 2 Kugeln innerlich berühren.

Man kann die 4 Punkte A, B, C, D, als die Scheitelpunkte einer dreyeckichten Pyramide anſehen,

und wenn man jede ihrer Grundflächen betrachtet, ſo hat man z. B. für das Dreyeck ABC

$$\overline{Am'} \cdot \overline{Bn'} \cdot \overline{Cr'} = \overline{Ar'} \cdot \overline{Bm'} \cdot \overline{Cp'}$$

woraus nach dem 6ten Lehrſatze folgt, daſs, wenn man ſich 3 Transverſalen An', Br', Cm' vorſtellt, dieſe 3 Transverſalen ſich in einem Punkte ſchneiden werden. Eben ſo iſt es bey den 3 andern Seitenflächen. Wenn man alſo von jedem Scheitel zu dem Durchſchnittspunkt der 3 Transverſalen der gegenüberſtehenden Grundfläche eine Linie zieht, ſo werden dieſe 4 neuen Transverſalen ſich nach dem 12ten Lehrſatze in einem Punkte des Raums ſchneiden.

Von den Linien $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ iſt jede in proportionale Segmente durch die Punkte m, m' n, n', r, r', getheilt; daraus folgt, daſs nach dem 11ten Lehrſatz die 3 Punkte m, n, r, in einer Ebene mit den 3 Punkten p', q', s' liegen. Eben ſo mit den andern.

29. Es ſey ABC (Fig. 34.) ein dem Kreiſe eingeſchriebenes Dreyeck. Durch jeden Scheitelpunkt ziehe ich eine Tangente, die ich verlängere, bis ſie die entgegengeſetzten Seiten in a, b, c ſchneidet, dann werden die Punkte a, b, c in einer graden Linie liegen.

Das Dreyeck ABa giebt

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{Ba}} = \frac{\sin A\hat{a}B}{\sin B\hat{A}a}$$

Das Dreyeck ACa

$$\frac{\overline{Ca}}{\overline{AC}} = \frac{\sin C\hat{A}a}{\sin A\hat{a}C}$$

Multiplicirt man, und bemerkt, daſs $A\hat{a}B$ einerley mit $A\hat{a}C$ iſt, und daſs

$$\sin B\hat{A}a = \sin C$$

$$\sin C\hat{A}a = \sin B$$

ſo hat man

$$\frac{\overline{AB}\,.\,\overline{Ca}}{\overline{AC}\,.\,\overline{Ba}} = \frac{\sin B}{\sin C}$$

Eben ſo

$$\frac{\overline{CA}\,.\,\overline{Bc}}{\overline{CB}\,.\,\overline{Ac}} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

$$\frac{\overline{BC}\,.\,\overline{Ab}}{\overline{BA}\,.\,\overline{Cb}} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

Multiplicirt man dieſe 3 Gleichungen, ſo kommt

$$\overline{Ab}\,.\,\overline{Bc}\,.\,\overline{Ca} = \overline{Ac}\,.\,\overline{Ba}\,.\,\overline{Cb}$$

woraus nach dem erſten Lehrſatz folgt, daſs die 3 Punkte a, b, c in grader Linie liegen.

30. Es ſey $ABCD$ (Fig. 35.) ein eingeſchriebenes Viereck. Ich verlängere die gegenüberſtehenden Seiten $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, bis ſie ſich in m ſchneiden, eben ſo $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ bis zu ihrem Durchſchnitt in n, und ziehe durch die Endpunkte der einen Diagonale, z. B. $\overline{AC}$, die Tangenten $\overline{Ap}$, $\overline{Cp}$, dann werden die 3 Punkte m, n, p, in grader Linie ſeyn.

Wenn wir das Dreyeck CDr betrachten, deſſen eine Seite $\overline{CD}$ durch m, die andere $\overline{Dr}$ durch n, die dritte Cr durch p geht, ſo geben die Dreyecke AmD, BmC, ACp, Arp, CDn, Crn:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{Dm}} = \frac{\sin A\hat{m}D}{\sin D\hat{A}m}$$

$$\frac{\overline{Cm}}{\overline{BC}} = \frac{\sin C\hat{B}m}{\sin B\hat{m}C}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{Cp}} = \frac{\sin A\hat{p}C}{\sin C\hat{A}p}$$

$$\frac{\overline{rp}}{\overline{Ar}} = \frac{\sin r\hat{A}p}{\sin A\hat{p}r}$$

$$\frac{\overline{Dn}}{\overline{CD}} = \frac{\sin D\hat{C}n}{\sin D\hat{n}C}$$

$$\frac{\overline{Cr}}{\overline{rn}} = \frac{\sin C\hat{n}r}{\sin n\hat{C}r}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen, und bemerkt, dass

$$\sin A\hat{m}D = \sin B\hat{m}C$$
$$\sin A\hat{p}C = \sin A\hat{p}r$$
$$\sin C\hat{n}r = \sin D\hat{n}C$$
$$\sin D\hat{A}m = \sin D\hat{C}n$$
$$\sin C\hat{B}m = \sin C\hat{A}p.$$

und

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{\sin r\hat{A}p}{\sin n\hat{C}r}$$

so hat man

$$\overline{AC} \cdot \overline{Cr} \cdot \overline{Cm} \cdot \overline{rp} \cdot \overline{Dn} = \overline{CD} \cdot \overline{Ar} \cdot \overline{Dm} \cdot \overline{Cp} \cdot \overline{rn} \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

aber

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\sin A\hat{D}C}{\sin C\hat{A}D}$$

$$\frac{\overline{Cr}}{\overline{Ar}} = \frac{\sin C\hat{A}D}{\sin A\hat{C}r}$$

Da nun $A\hat{C}r$ das Supplement von $A\hat{D}C$ ist, so hat man

$$\overline{AC} \cdot \overline{Cr} = \overline{CD} \cdot \overline{Ar}$$

dividirt man (A) damit, so bleibt

$$\overline{Cm} \cdot \overline{rp} \cdot \overline{Dn} = \overline{Dm} \cdot \overline{Cp} \cdot \overline{rn} \; \ldots \; (B)$$

eine Gleichung unter den Segmenten des Dreyecks, die nach dem ersten Lehrsatz nicht statt haben kann, ohne daſs *m, n, p,* in einer graden Linie liegen.

Weil der Durchschnittspunkt der Tangenten, die durch die Endpunkte von $\overline{AC}$ gehen, auf der Linie $\overline{mn}$ ist, so muſs der Durchschnittspunkt der Tangenten, die durch die andere Diagonale $\overline{BD}$ gehen, aus demselben Grunde auch auf $\overline{mn}$ seyn. Also liegen die 4 Punkte *m, n, p, q* in einer graden Linie.

Die Linie $\overline{mn}$ zwischen den Durchschnittspunkten der Seiten des eingeschriebenen Vierecks, wird durch die Punkte *p, q,* wo die Seiten des umschriebenen Vierecks sich schneiden, in proportionale Segmente getheilt, eben so $\overline{pq}$ durch *m, n;* denn das umschriebene Viereck *fghl* hat zu Diagonalen $\overline{fh}$, $\overline{gl}$, $\overline{pq}$. Es ist also eine jede von ihnen (12.) von den beyden andern in proportionale Segmente getheilt.

Aber aus demſelben Grunde, warum m, n, p, q in einer graden Linie liegen, liegen auch

$$f,\ k,\ h,\ n$$

und

$$l,\ k,\ g,\ m$$

in einer graden Linie, alſo gehen die Diagonalen $\overline{fh}$, $\overline{lg}$, durch die Punkte n, m, alſo iſt $\overline{pq}$ durch m, n, in proportionale Segmente getheilt, und umgekehrt (16.) mn durch p, q.

Aus denſelben Gründen ſind die andern Diagonalen $\overline{fh}$, $\overline{gl}$ durch k, n, und k, m ſo getheilt.

Wir können noch daraus ſchlieſsen:

1) daſs die Diagonalen des eingeſchriebenen und umſchriebenen Vierecks ſich in einem Punkte k ſchneiden.

2) Daſs, wenn man aus k ein Perpendikel auf $\overline{mn}$ ſenkt, dieſe Linie durch den Mittelpunkt des Kreiſes gehen wird, ſo wie die, welche man von m, n, ſenkrecht auf $\overline{fh}$, $\overline{gl}$ ſenkte.

3) Daſs der Halbmeſſer des Kreiſes die mittlere Proportionallinie zwiſchen ſeiner Entfernung von k, und ſeiner Entfernung von $\overline{mn}$ iſt u. ſ. w.

Doch würden dieſe Unterſuchungen uns zu weit führen. Ich bemerke nur, daſs, wenn man aus n z. B. die Linien $\overline{ns}$, $\overline{ns'}$ zu den Punkten zieht, wo der Kreis von $\overline{ml}$ geſchnitten wird, dieſe beyden Linien nothwendigerweiſe den Kreis berühren müſſen, weil n auf $\overline{pq}$ liegt, von deren Endpunkten $\overline{pA}$, $\overline{pC}$, $\overline{qB}$, $\overline{qD}$ ausgehen, und die Sehnen $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{ss'}$ ſich in einem Punkte k ſchneiden.

31. Es

31. Es ſey *ABCDEF* (Fig. 36.) ein dem Kreiſe eingeſchriebenes Sechseck, ich verlängere die gegenüberſtehenden Seiten $\overline{AB}$, $\overline{ED}$, bis ſie ſich in *m* ſchneiden, eben ſo $\overline{BC}$, $\overline{EF}$, und $\overline{CD}$, $\overline{AF}$ bis zu ihren Durchſchnitten in *n*, *p*, dann ſind *m*, *n*, *p* in einer graden Linie.

Betrachten wir das Dreyeck $D\hat{E}r$, deſſen eine Seite $\overline{DE}$ durch *m*, die andere $\overline{Ar}$ durch *n*, die dritte $\overline{Dr}$ durch *p* geht, und ziehen die Diagonalen $\overline{FB}$, $\overline{FC}$, $\overline{FD}$, $\overline{FE}$ u. ſ. w., ſo geben uns die Dreyecke *BmE*, *AmD*, *BnE*, *Cnr*, *ADp*, *Fpr*:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{mE}} = \frac{\sin B\hat{m}E}{\sin m\hat{B}E}$$

$$\frac{\overline{mD}}{\overline{AD}} = \frac{\sin m\hat{A}D}{\sin A\hat{m}D}$$

$$\frac{\overline{nE}}{\overline{BE}} = \frac{\sin n\hat{B}E}{\sin B\hat{n}E}$$

$$\frac{\overline{Cr}}{\overline{nr}} = \frac{\sin C\hat{n}r}{\sin n\hat{C}r}$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{Dp}} = \frac{\sin A\hat{p}D}{\sin p\hat{A}D}$$

$$\frac{\overline{rp}}{\overline{rF}} = \frac{\sin r\hat{F}p}{\sin r\hat{p}F}$$

Multiplicirt man dieſe Gleichungen, und bemerkt, daſs

$$\sin B\hat{m}E = \sin A\hat{m}D$$
$$\sin B\hat{n}E = \sin C\hat{n}r$$
$$\sin A\hat{p}D = \sin r\hat{p}F$$
$$\frac{\overline{Cr}}{\overline{rF}} = \frac{\sin C\hat{F}r}{\sin F\hat{C}r}$$

und wenn wir den Halbmeſſer des Kreiſes = 1 ſetzen:

$$\sin m\hat{B}E = \overline{AE}$$
$$\sin m\hat{A}D = \overline{BD}$$
$$\sin n\hat{B}E = \overline{CE}$$
$$\sin n\hat{C}r = \overline{BD}$$
$$\sin p\hat{A}D = \overline{DF}$$
$$\sin r\hat{F}p = \overline{AE}$$
$$\sin C\hat{F}r = \overline{CE}$$
$$\sin F\hat{C}r = \overline{DF}$$

ſo haben wir

$$\overline{mD} \cdot \overline{nE} \cdot \overline{rp} = \overline{mE} \cdot \overline{nr} \cdot \overline{Dp}$$

eine Gleichung zwiſchen den Segmenten des Dreyecks *DEr*, die nach dem erſten Lehrſatz nicht ſtatt haben kann, wenn *m*, *n*, *p*, nicht in einer graden Linie liegen.

Es ſey *ABCDEF* (Fig. 37.) ein dem Kreiſe eingeſchriebenes Sechseck; durch jeden Winkelpunkt wollen wir eine Tangente ziehen, um das umſchriebene Sechseck *abcdef* zu bilden, dann werden die 3 Diagonalen *ad*, *be*, *cf* dieſes umſchriebenen Sechsecks ſich alle in einem Punkte *K* ſchneiden.

Verlängere ich die gegenüberſtehenden Seiten $\overline{BC}$, $\overline{FE}$ des eingeſchriebenen Sechsecks, bis ſie ſich in n ſchneiden, und ziehe von n zu den Punkten, wo die Diagonale $\overline{Fc}$ den Kreis ſchneidet, die Linien $\overline{ns}$, $\overline{ns'}$, ſo werden dieſe Linien Tangenten des Kreiſes ſeyn. Denn, verlängert man $\overline{cd}$, $\overline{fe}$ bis ſie ſich in h, $\overline{cb}$, $\overline{fa}$ bis ſie ſich in g ſchneiden, ſo hat man das umſchriebene Viereck $cgfh$, alſo ſind $\overline{ns}$, $\overline{ns'}$ Tangenten. Man beweiſet eben ſo, daſs, wenn man $\overline{AF}$, $\overline{CD}$ verlängert, bis ſie ſich in p ſchneiden (Fig. 36, 37.), die Linien aus p nach t, t' Tangenten ſeyn müſſen; eben ſo wenn $\overline{AB}$, $\overline{DE}$, bis zu ihrem Durchſchnitt m verlängert werden, und man aus m nach u, u', Linien zieht.

Nun ſind aber m, n, p in einer graden Linie (31.), alſo ſchneiden ſich ss', tt' uu', in einem Punkte, und weil ſie der Richtung nach in die Diagonalen des umſchriebenen Sechsecks fallen, gilt daſſelbe von dieſen Diagonalen.

Dieſen Satz, der ſich wie die vorigen auf alle Kegelſchnitte erſtreckt, verdanken wir Brianchon, der mehrere intereſſante Folgerungen daraus gezogen hat (ſiehe ſeine Mémoire im 13ten Hefte des Journal de l'Ecole Polytechnique, Tome VI.).

Man ſieht leicht, daſs alles dieſs auch auf Figuren anwendbar iſt, die auf der Oberfläche einer Kugel durch Bogen gröſster Kreiſe beſchrieben ſind.

Auch ſind dieſe Sätze auf alle Kegelſchnitte anwendbar, da man alle dieſe Curven als Schatten be-

trachten kann, die ein Kreis zwischen einem leuchtenden Punkte und einer beliebig geneigten Ebene gehalten, auf diese letztere wirft. Eine Linie also, die Tangente einer Curve ist, muss es auch am Schatten bleiben; Linien, die in der Figur in proportionale Segmente getheilt sind, müssen es ebenfalls im Schatten seyn. Man sieht also, welche Ausdehnung man der Theorie der Transversalen geben kann. Uns genügt es, hier ihre Anfangsgründe entwickelt zu haben.

Zuſätze.

I.

zu 131.

Folgende analytiſche Behandlung der merkwürdigen Punkte eines Dreyecks verdanke ich der Güte des Herrn Profeſſor Gauſs. Auch Euler hat ähnliche Unterſuchungen angeſtellt, aber ſeine Reſultate (in den Petersburger Commentarien) konnten ſchon der Methode wegen nicht die einfache Eleganz dieſer Unterſuchungen haben.

Es ſeyen A, A', A'' die 3 Winkelpunkte eines Dreyecks und deren Coordinaten reſpective

$$x, y$$
$$x', y'$$
$$x'', y''.$$

Die Coordinaten der Punkte B, B', B'', welche die Seiten $A'A''$, $A''A$, AA' halbiren, werden offenbar ſeyn

$$\tfrac{1}{2}(x' + x''),\ \tfrac{1}{2}(y' + y'')$$
$$\tfrac{1}{2}(x'' + x),\ \tfrac{1}{2}(y'' + y)$$
$$\tfrac{1}{2}(x + x'),\ \tfrac{1}{2}(y + y')$$

Man nehme auf den Linien AB, $A'B'$, $A''B''$ (vorwärts oder rückwärts verlängert, wenn es nöthig iſt), von A, A', A'' ab gezählt, Stücke, welche jenen reſpective proportional ſind, und ſich dazu wie $n : 1$ verhalten. Falls man die Stücke rückwärts nimmt, hat man n als negativ anzuſehen. Dieſer Stücke Endpunkte heiſsen C, C', C'', ſo ſind ihre Coordinaten

$$x + n\,\tfrac{1}{2}(x' + x'' - 2x),\ y + n\,\tfrac{1}{2}(y' + y'' - 2y)$$
$$x' + n\,\tfrac{1}{2}(x'' + x - 2x'),\ y' + n\,\tfrac{1}{2}(y'' + y - 2y')$$
$$x'' + n\tfrac{1}{2}(x + x' - 2x''),\ y'' + n\tfrac{1}{2}(y + y' - 2y'')$$

oder wenn man

$$1 - n = \alpha$$
$$\tfrac{1}{2} n = \beta$$

ſetzt

$$\alpha x + \beta (x' + x''), \; \alpha y + \beta (y' + y'')$$
$$\alpha x' + \beta (x'' + x), \; \alpha y' + \beta (y'' + y)$$
$$\alpha x'' + \beta (x + x'), \; \alpha y'' + \beta (y + y')$$

Von den Punkten C, C', C'' werden Perpendikel auf $A'A''$, $A''A$, AA', gefällt, man ſucht die Lage der 3 Durchſchnittspunkte dieſer Perpendikel. Es ſeyen die Coordinaten des Durchſchnittspunktes der beyden letzten Perpendikel

$$\xi, \eta$$

welche man mit Hülfe des folgenden Lehrſatzes beſtimmen wird.

Wenn

$$a, b$$
$$a', b'$$
$$a'', b''$$
$$a''', b'''$$

die Coordinaten von 4 Punkten ſind, und die graden Linien durch den erſten und zweyten Punkt auf der Linie durch den dritten und vierten ſenkrecht ſind, ſo hat man

$\dfrac{b' - b}{a' - a} =$ tang. der Neigung der erſten Linie gegen die Abſciſſenlinie

$\dfrac{b''' - b''}{a''' - a''} =$ tang. der Neigung der zweyten Linie gegen die Abſciſſenlinie

und folglich da die eine Neigung um 90° gröſser iſt, als die andere das Product der beyden Tangenten $= -1$, alſo

$$\frac{b'-b}{a'-a} \cdot \frac{b'''-b''}{a'''-a''} = -1$$

In unſerm Falle hat man alſo

$$\frac{\alpha y' + \beta(y''+y) - \eta}{\alpha x' + \beta(x''+x) - \xi} \cdot \frac{y''-y}{x''-x} = -1$$

$$\frac{\alpha y'' + \beta(y+y') - \eta}{\alpha x' + \beta(x+x') - \xi} \cdot \frac{y-y'}{x-x'} = -1$$

Hieraus folgt leicht durch Elimination

$$\xi = \frac{(y-y')(y'-y'')(y''-y)(\alpha-\beta)}{y(x''-x')+y'(x-x')+y''(x'-x)}$$
$$+ \alpha . \frac{xy(x''-x')+x'y'(x-x'')+x''y''(x'-x)}{y(x''-x')+y'(x-x')+y''(x'-x)}$$
$$+ \beta . \frac{y(x''x''-x'x')+y'(xx-x''x'')+y'(x'x'-xx)}{y(x''-x')+y'(x-x')+y''(x'-x)}$$

Der Werth von η folgt aus dem Werthe von ξ, wenn man in dieſem alle x, x', x'', mit den entſprechenden y, y', y'' vertauſcht, wie man auch a priori leicht voraus ſehen kann.

Die Coordinaten des Durchſchnitts des erſten und letzten Perpendikels folgen, wie man leicht ſieht, aus ξ und η, wenn man x mit x', und y mit y' vertauſcht, da aber dadurch ξ und η ihre Werthe nicht ändern, indem in beyden offenbar die Coordinaten der Punkte A, A', A'' auf gleiche Art entriren, ſo iſt klar, daſs dieſer zweyte Durchſchnittspunkt mit dem erſten zuſammenfällt, und eben deshalb fällt der dritte Durchſchnittspunkt mit den beyden erſten von ſelbſt gleichfalls zuſammen.

Für den Schwerpunkt iſt übrigens offenbar

$$n = \tfrac{2}{3}$$

alſo

$$\alpha = \beta = \tfrac{1}{3}$$

und daher

$$\xi = \tfrac{1}{3}(x + x' + x'')$$
$$\eta = \tfrac{1}{3}(y + y' + y'')$$

Für den Mittelpunkt des eingeſchriebenen Kreiſes iſt

$$n = 1$$

alſo

$$\alpha = 0$$
$$\beta = \tfrac{1}{2}$$

Für den Durchſchnittspunkt des Perpendikels aus A u. ſ. w. ſelbſt iſt

$$n = 0$$

oder

$$\alpha = 1$$
$$\beta = 0$$

Der Nenner in dem Werthe von ξ, η iſt der doppelte Inhalt des Dreyecks.

Anmerkung des Herausgebers. Es iſt, nach einem ſchönen Theorem des Herrn Profeſſor Gauſs, der Inhalt eines Vielecks von n Seiten, wenn die Coordinaten der Winkelpunkte nach der Reihe in einer Richtung gezählt:

$$x,\ y$$
$$x'\ y'$$
$$\cdots\cdots$$
$$x^{n-1},\ y^{n-1}$$

find

$$=\tfrac{1}{2}\{x(y'-\overset{n-1}{y})+x'(\overset{2}{y}-y)+x''(\overset{3}{y}-y')\ldots\ldots$$
$$+\overset{n-1}{x}(y-\overset{n-2}{y})\}$$

worüber Er selbst vielleicht, bey einer andern Gelegenheit, uns eine vollständigere Abhandlung schenken wird.

Auch folgt leicht aus diesen Formeln, daſs für alle verschiedene Werthe von n die Durchschnittspunkte in Einer graden Linie liegen, und ihre Entfernungen den Unterschieden der Werthe von n proportional sind.

Die Formeln für ξ, η, werden höchst einfach, wenn man die Abscissenlinie durch AA' legt, und ihren Anfang in A setzt, also

$$x = y = y' = o$$

II.

zu 131. *

Daſs die Perpendikel in einem Dreyecke, aus den Spitzen auf die gegenüberstehenden Seiten sich in einem Punkte schneiden, kann man sehr einfach so zeigen.

Das gegebene Dreyeck sey BDF, (Fig. 38.) und die erwähnten Perpendikel $\overline{BI}$, $\overline{DG}$, $\overline{FH}$.

Man ziehe durch jeden Scheitelpunkt des Dreyeckes Parallelen mit der gegenüberstehenden Seite, die sich in den Punkten A, C, E, schneiden, es

ſteht folglich $\overline{FH}$ auch auf $\overline{AE}$, $\overline{GD}$ auf $\overline{CE}$, $\overline{BI}$ auf $\overline{AC}$ ſenkrecht, und zwar iſt

$$\overline{AB} = \overline{BC}$$
$$\overline{ED} = \overline{DC}$$
$$\overline{AF} = \overline{FE}$$

Beſchreibt man nun um das Dreyeck ACE einen Kreis, ſo liegt ſein Mittelpunkt ſowohl in $\overline{BI}$, als in $\overline{GD}$, als in $\overline{FH}$, dieſe 3 Linien müſſen ſich alſo in einem Punkte ſchneiden.

Puiſſant giebt in ſeinem Reçueil der propoſitions de Géometrie einen zierlichen analytiſchen Beweis, und fügt einen geometriſchen bey, der nicht daſſelbe Verdienſt hat.

III.

zu 215.

Aus dieſem Satze leitet man leicht her, daſs, wenn $\omega = \frac{360^\circ}{4n}$

$$1 = \sin\omega^2 \left\{ \frac{1}{\sin\omega . \sin 3\omega} + \frac{1}{\sin 3\omega . \sin 5\omega} \cdots\cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{1}{\sin(2n-3)\omega . \sin(2n-1)\omega} \right\}$$

wozu man übrigens eben ſo leicht durch Analyſe gelangt, denn da

$$\cotg\omega = \frac{\cos\omega}{\sin\omega}$$
$$\cotg 3\omega = \frac{\cos 3\omega}{\sin 3\omega}$$

ſo iſt

$$cotg\,\omega - cotg\,3\,\omega = \frac{\sin 2\,\omega}{\sin \omega\,.\,\sin 3\,\omega}$$

$$cotg\,3\,\omega - cotg\,5\,\omega = \frac{\sin 2\,\omega}{\sin 3\,\omega\,.\,\sin 5\,\omega}$$

$$cotg\,5\,\omega - cotg\,7\,\omega = \frac{\sin 2\,\omega}{\sin 5\,\omega\,.\,\sin 7\,\omega}$$

ſetzt man das bis zu $cotg\,(2n-1)\,\omega = -\,cotg\,\omega$ fort, und addirt auf beyden Seiten, ſo erhält man

$$2\,cotg\,\omega = \sin 2\,\omega \left\{ \frac{1}{\sin \omega\,.\,\sin 3\,\omega} + \frac{1}{\sin 3\,\omega\,.\,\sin 5\,\omega} \ldots + \frac{1}{\sin (2n-3)\,\omega\,.\,\sin (2n-1)\,\omega} \right\}$$

Da nun $\frac{\sin 2\,\omega}{2\,cotg\,\omega} = \frac{\sin \omega\,.\,\sin 2\,\omega}{2\,\cos \omega} = \sin \omega^2$

ſo folgt eben das, was durch geometriſche Betrachtungen aus dem Carnotſchen Satze floſs.

Bezeichnet man nun das Product

$$\sin \omega\,.\,\sin 3\,\omega\,.\,\sin 5\,\omega\,.\,.\,.\,\sin (2n-1)\,\omega$$

mit W, und daſſelbe Product, wenn

das erſte und zweyte Glied getilgt iſt,

mit $W^{[1,\,3]}$

das zweyte und dritte Glied getilgt iſt,

mit $W^{[3,\,5]}$

das dritte und vierte Glied getilgt iſt,

mit $W^{[5,\,7]}$

ſo iſt

$$W = \sin \omega^2 \left\{ W^{[1,\,3]} + W^{[3,\,5]} \ldots + W^{[2n-3\;\;2n-1]} \right\}$$

Um die Summe dieser Reihe zu erhalten, müssen wir das Product W etwas genauer untersuchen, und zwar zuerst für den Fall, wenn n ungrade ist.

In diesem Falle ist nach gehöriger Substitution, und wenn man $\sin n\omega = 1$ ausläßt

$$W = \sin\omega^2 \,.\, \sin 3\omega^2 \ldots \sin(n-2)\omega^2$$

Multipliciren wir mit $\sin 2\omega^2 \,.\, \sin 4\omega^2 \ldots \sin(n-1)\omega^2$ so erhalten wir

$$W \sin 2\omega^2 \,.\, \sin 4\omega^2 \ldots \sin(n-1)\omega^2 = \sin\omega^2 \,.\, \sin 2\omega^2 \,.\, \sin 3\omega^2 \ldots \sin(n-1)\omega^2$$

Da nun

$$\sin(n-1)\omega = \cos\omega$$
$$\sin(n-2)\omega = \cos 2\omega \quad \text{u. s. f.}$$

so verwandelt sich das zweyte Glied in

$$\sin\omega^2 \cos\omega^2 \,.\, \sin 2\omega^2 \,.\, \cos 2\omega^2 \ldots \sin\tfrac{1}{2}(n-1)\omega^2 \,.\, \cos\tfrac{1}{2}(n-1)\omega^2$$

oder da

$$\sin\omega^2 \cos\omega^2 = (\tfrac{1}{2})^2 \sin 2\omega^2 \quad \text{u. s. w.}$$

so erhalten wir die Gleichung

$$W \sin 2\omega^2 \,.\, \sin 4\omega^2 \ldots \sin(n-1)\omega^2 = (\tfrac{1}{2})^{n-1} \sin 2\omega^2 \,.\, \sin 4\omega^2 \ldots \sin(n-1)\omega^2$$

also

$$W = (\tfrac{1}{2})^{n-1}$$

Ist n grade, so haben wir

$$W = \sin\omega^2 \, \sin 3\omega^2 \ldots \sin(n-1)\omega^2$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit

$$\sin 2\omega^2 \,.\, \sin 4\omega^2 \ldots \sin(n-2)\omega^2$$

so kommt wie vorhin

$$W \sin 2\omega^2 \ldots \sin(n-2)\omega^2 = (\tfrac{1}{2})^{n-2} \sin\tfrac{1}{2}n\omega^2 \,.\, \sin 2\omega^2 \,.\, \sin 4\omega^2 \ldots \sin(n-2)\omega^2$$

oder

$$W = (\tfrac{1}{2})^{n-2} \sin \tfrac{1}{2} n\omega^2$$

Da nun aber $\sin \frac{1}{2} n\omega = \sin 45°$, ſo haben wir auch hier

$$W = (\tfrac{1}{2})^{n-1}$$

Es iſt alſo allgemein

$$(\tfrac{1}{2})^{n-1} = \sin\omega^2 \{ W^{[1,3]} + W^{[3,5]} \ldots . + W^{[2n-3,\, 2n-1]} \}$$

IV.

zu 310.

Die Aufgabe läſst ſich auch ſo faſſen:

Es iſt die Grundlinie eines Dreyecks gegeben, der Winkel, der dieſer Grundlinie gegen über ſteht, und eine Linie, die dieſen Winkel halbirt, man ſoll daraus das Dreyeck finden.

Auflöſung.

Es ſey (Fig. 114.) gegeben

$\overline{HK} = a$

$CB = b$

$BKC = 2\phi$

man ſucht

$CK = r$

$BK = r'$

Man lege durch K zwey rechtwinklichte Axen, ſo daſs die Axe des x in $\overline{HK}$ fällt. Es ſeyen die

Coordinaten von C x, y

von H x', y'

von B x'', y''

So giebt uns die Entfernung des Punktes C von B, und die Bedingungsgleichung, daſs C, H, B in einer graden Linie liegen, die beyden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}(x-x)^2+(y-y)^2-bb=o\\ x(y'-y'')+x'(y''-y)+x''(y-y')=o\end{array}\right\}(A)$$

Da nun aber

$$x=r\,.\cos\phi \qquad y=r\,.\sin\phi$$
$$x'=a \qquad y'=o$$
$$x''=r'\,.\cos\phi \qquad y''=r'\,.\sin\phi$$

ſo erhalten wir, wenn wir dieſe Werthe in (A) ſetzen

$$(r-r')^2\cos\phi^2+(r+r')^2\sin\phi^2-bb=o$$
$$2rr'\cos\phi-a(r+r')=o$$

Setzt man nun

$$r+r'=\xi$$
$$r-r'=\eta$$

ſo verwandeln ſich die vorigen Gleichungen in

$$\left.\begin{array}{l}\eta\eta+tg\,\phi^2\xi\xi-\dfrac{bb}{\cos\phi^2}=o\\ -\eta\eta+\xi\xi-\dfrac{2a}{\cos\phi}\xi=o\end{array}\right\}(B)$$

Man braucht nur zu addiren, ſo kommt

$$\xi\xi-2a\cos\phi\,\xi-bb=o$$

alſo

$$\xi=a\cos\phi\pm\surd(bb+aa\cos\phi^2)$$

oder wenn man $\dfrac{bb+aa\cos\phi^2}{\cos\phi^2}=cc$

ſetzt

$$\xi=\cos\phi\,(a\pm c)$$

Elimi-

Eliminirt man aus (B) $\xi\xi$, ſo erhält man

$$\eta\eta + 2a\,tg\phi\,.\,\xi - bb = o$$

alſo

$$\eta = \pm\{bb - 2a\,sin\phi\,(a \pm c)\}^{\frac{1}{2}}$$

und endlich

$$r = \tfrac{1}{2}\,cos\phi\,(a \pm c) \pm \tfrac{1}{2}\,\{bb - 2a\,sin\phi\,(a \pm c)\}^{\frac{1}{2}}$$

$$r' = \tfrac{1}{2}\,cos\phi\,(a \pm c) \mp \tfrac{1}{2}\,\{bb - 2a\,sin\phi\,(a \pm c)\}^{\frac{1}{2}}$$

V.

zu 330.

Eine mir von Herrn Profeſſor Gauſs mitgetheilte Auflöſung dieſes Problems hat einige Ähnlichkeit mit der hier gegebenen: doch ſcheint ſie mir in mehr als einer Rückſicht noch einfacher. Folgendes ſind die Hauptmomente dieſer Methode.

Es ſey der Halbmeſſer des Kreiſes, r, die Coordinaten der Winkelpunkte des Polygons

$$r\,cos\phi,\ r\,sin\phi$$
$$r\,cos\phi',\ r\,sin\phi'$$
$$r\,cos\phi'',\ r\,sin\phi'' \text{ etc.}$$

endlich die Coordinaten der gegebnen Punkte, durch welche die verlängerten Seiten des Polygons gehn, (welche reſpective den erſten und zweyten Winkelpunkt, den zweyten und dritten u. ſ. w. verbinden)

$$a\,cos A,\ a\,sin A$$
$$a'\,cos A',\ a'\,sin A'$$
$$a''\,cos A'',\ a''\,sin A'' \text{ etc.}$$

Dann ist, nach dem Grundsatze, dass, wenn drey Punkte, deren Coordinaten $x, y;\ x', y';\ x'', y''$ sind, in einer geraden Linie liegen, die Bedingungsgleichung

$$xy' + x'y'' + x''y - x'y - x''y' - xy'' = 0$$

Statt hat,

$$\left.\begin{array}{l} rr \cos\phi \sin\phi' + ra \cos\phi' \sin A + ar \cos A \sin\phi \\ - rr \cos\phi' \sin\phi - ar \cos A \sin\phi' - ra \cos\phi \sin A \end{array}\right\} = 0$$

oder

$$r \sin(\phi' - \phi) - a \sin(\phi' - A) + a \sin(\phi - A) = 0$$

oder

$$r \cos\tfrac{1}{2}(\phi' - \phi) = a \cos\tfrac{1}{2}(\phi' + \phi - 2A)$$

Entwickelt man diese beyden Cosinus, dividirt dann mit $\cos\frac{1}{2}\phi \cos\frac{1}{2}\phi'$, und bezeichnet $\tang\frac{1}{2}\phi$ mit t, $\tang\frac{1}{2}\phi'$ mit t',

und $\dfrac{a \sin A}{r - a \cos A} = \alpha$, $\dfrac{r + a \cos A}{r - a \cos A} = \beta$, so wird

I. $t = \dfrac{1 - \alpha t'}{\alpha - \beta t'}$

Ganz auf ähnliche Art wird, wenn man

$$\tang\tfrac{1}{2}\phi'' = t'', \quad \frac{a' \sin A'}{r' - a' \cos A'} = \alpha', \quad \frac{r + a' \cos A'}{r - a' \cos A'} = \beta'$$

setzt,

II. $t' = \dfrac{1 - \alpha' t''}{\alpha' - \beta' t''}$ u. s. w.

Man sieht hieraus, dass man so viele Gleichungen erhält, als das Polygon Seiten hat, und dass man durch Verbindung derselben zuletzt auf eine quadratische Gleichung für t kommt.

VI.

zu 334.

Aufgabe.

Es ſind drey Kreiſe der Lage und Gröſse nach gegeben, man ſoll einen vierten beſchreiben, der ſie alle berührt.

Auflöſung.

Man lege durch den Mittelpunkt des einen Kreiſes die ſenkrechten Axen, und nenne die Abſtände von dieſen Linien

Des Mittelpunkts des zweyten Kreiſes a, b
des dritten Kreiſes a', b'
des geſuchten x, y

Die Entfernung des Mittelpunkts des erſten Kreiſes, vom Mittelpunkte des geſuchten heiſse $= z$, ſo iſt

$z - c$ die Entfernung des Mittelpunkts des zweyten vom Mittelpunkte des geſuchten,

$z - c'$ die Entfernung des Mittelpunkts des dritten vom Mittelpunkte des geſuchten;

wo c den Unterſchied der Halbmeſſer des erſten und zweyten, und c' den Unterſchied der Halbmeſſer des erſten und dritten Kreiſes bedeutet.

Wir haben folgende Gleichungen:

$$xx + yy = zz$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = (z-c)^2$$
$$(x-a')^2 + (y-b')^2 = (z-c')^2$$

Setzt man

$$x = z\cos\phi$$
$$y = z\sin\phi$$

ſo erhält man aus den vorigen Gleichungen

$$aa + bb - cc = 2az\cos\phi + 2bz\sin\phi - 2cz$$
$$a'a' + b'b' - c'c' = 2a'z\cos\phi + 2b'z\sin\phi - 2c'z$$

Dividirt man die erſte Gleichung mit $a\cos\phi + b\sin\phi - c$, die zweyte mit $a'\cos\phi + b'\sin\phi - c'$, und zieht ſie dann von einander ab, ſo erhält man

$$\frac{a'a' + b'b' - c'c'}{a'\cos\phi + b'\sin\phi - c'} - \frac{aa + bb - cc}{a\cos\phi + b\sin\phi - c} = 0$$

oder wenn wir bezeichnen

$$a'a' + b'b' - c'c' = A'$$
$$aa + bb - cc = A$$
$$(A'a - Aa')\cos\phi + (A'b - Ab')\sin\phi = A'c - Ac'$$

Setzen wir nun

$$A'a - Aa' = R\cos M$$
$$A'b - Ab' = R\sin M$$
$$A'c - Ac' = N$$

ſo verwandelt ſich unſere Gleichung in

$$R\cos(\phi - M) = N$$

worin auſser ϕ alles gegeben iſt. Man erhält daraus zwey Werthe für ϕ, unter denen man nach der Art, wie der geſuchte Kreis berühren ſoll, zu wählen hat.

VII.

zu 341.

Entwickelung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie.

Sind a, b, c die Seiten; A, B, C die gegenüberstehenden Winkel eines sphärischen Dreyecks, so ist

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos A$$

wie Lagrange, für den Fall, dass sowohl b als c kleiner wie 90°, elegant bewiesen hat. Indessen läfst sich der Beweis leicht auf alle andere Fälle ausdehnen.

Es können folgende Fälle eintreten:

I. $b < 90°$
$c < 90°$

Hier gilt der Beweis unmittelbar.

II. $b > 90°$
$c > 90°$

Man verlängere die Seiten b, und c über die Punkte B und C hinaus bis zum Durchschnitte A', und bestimme den Werth von a aus der Betrachtung des Dreyecks $A'BC$.

III. $b > 90°$
$c < 90°$

Man verlängere die Seiten b, und a, über die Punkte A und B hinaus bis zum Durchschnitte C', in dem Dreyeck $C'AB$ ist sodann aus Fall I

$$\cos(180° - a) = \cos c \,.\, \cos(180° - b) + \sin c \,.\, \sin(180° - b) \cos(180° - A)$$

welches mit der Grundformel identisch ist.

Mit dieſem Falle iſt $b < 90^\circ$ und $c > 90^\circ$ weſentlich einerley.

IV. $b = 90^\circ$

$A = 90^\circ$

Hier iſt C der Pol von AB alſo nothwendig auch $a = 90^\circ$. Folglich iſt die Formel

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos A$$

von ſelbſt evident. Mit dieſem Falle iſt $c = 90^\circ$, $A = 90^\circ$ weſentlich einerley.

V. $b = 90^\circ$

$A \gtrless 90^\circ$

1) $c = 90^\circ$. Dann wird A der Pol von c, alſo $b = 90^\circ$, und $a = A$. Die Gleichung

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos A$$

iſt von ſelbſt evident.

2) $c < 90^\circ$. Hier wird c über B hinaus bis zur Länge von 90° fortgeſetzt. Aus der Betrachtung des Dreyecks folgt dann

$$\cos a = \cos(90^\circ - c) \cos A + \sin(90^\circ - c) \sin A \,.\, \cos 90^\circ$$

oder

$$\cos a = \sin c \,.\, \cos A$$

daher die Formel auch in dieſem Falle richtig iſt.

3) $c > 90^\circ$. Hier wird von c der Bogen 90° in dem Punkte R abgeſchnitten, dann folgt aus Betrachtung des Dreyecks BRC

$$\cos a = \cos(c - 90^\circ) \cos A + \sin(c - 90^\circ) \sin A \,.\, \cos 90^\circ$$

oder

$$\cos a = \sin c \,.\, \cos A$$

wie im vorigen Fall.

Die Fälle, wo $b < 90°$ oder $b > 90°$, und zugleich $c = 90°$, ſind mit den beyden vorigen weſentlich einerley.

Zählt man alſo alle mögliche Fälle auf, ſo folgt der Beweis, wenn

Beyde Seiten kleiner als 90°	aus	I
Beyde Seiten gröſser als 90°	aus	II
Eine gröſser, die andere kleiner als 90°	aus	III
Beyde = 90°	aus	IV u. V. 1.
Eine = 90° die andere kleiner	aus	IV u. V. 2.
Eine = 90° die andere gröſser	aus	IV u. V. 3.

Wir können alſo allgemein annehmen:

(A) . . . $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$

und ebenſo

(2) $\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B$

dividirt man (A) mit $\sin c$, und multiplicirt (2) mit $\cot g\, c$, und addirt, ſo erhält man

$$\frac{\cos a}{\sin c} = \frac{\cos a \cos c^2}{\sin c} + \sin b \cdot \cos A + \sin a \cdot \cos c \cdot \cos B$$

alſo

(3) $\cos a \cdot \sin c = \sin b \cdot \cos A + \sin a \cdot \cos c \cdot \cos B$

ebenſo

(4) $\cos c \cdot \sin a = \sin b \cdot \cos C + \sin c \cdot \cos a \cdot \cos B$

Multiplicirt man (4) mit $\cos B$, und addirt (3)

(5) $\cos a \cdot \sin c \cdot \sin B^2 = \sin b \cdot \cos A + \sin b \cdot \cos B \cdot \cos C$

ebenſo

(6) $\cos a \cdot \sin b \cdot \sin C^2 = \sin c \cdot \cos A + \sin c \cdot \cos B \cdot \cos C$

Multiplicirt man (5) mit $\frac{\sin c}{\cos a}$ und zieht davon (6) mit $\frac{\sin b}{\cos a}$ multiplicirt ab, ſo erhalten wir

$$(7)\ \sin c^2 . \sin B^2 - \sin b^2 . \sin C^2 = 0$$

oder

$$(B) \ldots \sin c . \sin B = \sin b . \sin C$$

und wenn man (A, 5) mit $\sin b$ dividirt, und davon (B) mit $\frac{\cos a \sin B}{\sin b}$ multiplicirt abzieht.

$$(C) \ldots \cos A = - \cos B . \cos C + \sin B . \sin C . \cos a$$

endlich wenn man (A, 4) mit $\sin c$ dividirt, und (B) mit $\frac{\cot g\, C}{\sin c}$ multiplicirt, davon abzieht.

$$(D) \ldots \cot g\, c . \sin a - \cot g\, C . \sin B = \cos a . \cos B$$

Aus dieſen 4 Grundformeln folgen die ſogenannten Neperſchen Analogien, und die Abkürzungen, welche durch die Bedingung, daſs das ſphäriſche Dreyeck rechtwinklicht ſeyn ſoll, angebracht werden können, von ſelbſt.

Man vergleiche mit dieſer Entwickelung die von Lagrange im ſechsten Heft des Journal de l'Ecole Polytechnique.

VIII.

zu 357.

Auf ähnliche Art wie vorher das Problem der 3 Kreiſe, läſst ſich auch dieſes durch analytiſche Geometrie auflöſen.

Man lege 3 auf einander ſenkrechte Ebenen durch den Mittelpunkt der erſten gegebenen Kugel, ſo daſs die Coordinaten des Mittelpunkts der erſten o, o, o
des Mittelpunkts der zweyten a, b, c
des Mittelpunkts der dritten a', b', c'
des Mittelpunkts der vierten a'', b'', c''
des Mittelpunkts der geſuchten x, y, z

Dann ziehe man vom Mittelpunkt einer jeden Kugel zum Mittelpunkt der geſuchten grade Linien, und nenne die Linie vom Mittelpunkt
der erſten zum Mittelpunkt der geſuchten . . . ζ
der zweyten zum Mittelpunkt der geſuchten . . . $\zeta - e$
der dritten zum Mittelpunkt der geſuchten . . . $\zeta - e'$
der vierten zum Mittelpunkt der geſuchten . . . $\zeta - e''$

wo e, e', e'' die Differenzen des Halbmeſſers der andern gegebenen Kugeln von dem Halbmeſſer der erſten ſind.

Wir haben alſo die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \zeta\zeta &= xx + yy + zz \\ (\zeta - e)^2 &= (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \\ (\zeta - e')^2 &= (x-a')^2 + (y-b')^2 + (z-c')^2 \\ (\zeta - e'')^2 &= (x-a'')^2 + (y-b'')^2 + (z-c'')^2 \end{aligned}\right\} \ldots (A)$$

daraus werden

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz - \zeta e &= \tfrac{1}{2}(aa + bb \\ &\quad + cc - ee) = \tfrac{1}{2}A \\ a'x + b'y + c'z - \zeta e' &= \tfrac{1}{2}(a'a' + b'b' \\ &\quad + c'c' - e'e') = \tfrac{1}{2}A' \\ a''x + b''y + c''z - \zeta e'' &= \tfrac{1}{2}(a''a'' + b''b'' \\ &\quad + c''c'' - e''e'') = \tfrac{1}{2}A'' \end{aligned}\right\} \ldots \text{(B)}$$

Multiplicirt man die erste mit b', die zweyte mit $-b$, und addirt, multiplicirt wieder die erste mit b'', und die dritte mit $-b$, und addirt, so kommt

$$\left.\begin{aligned} (ab' - a'b)x + (cb' - c'b)z - (eb' - e'b)\zeta \\ = \tfrac{1}{2}(Ab' - A'b) \\ (ab'' - a''b)x + (cb'' - c''b)z - (eb'' - e''b)\zeta \\ = \tfrac{1}{2}(Ab'' - A''b) \end{aligned}\right\} \ldots \text{(C)}$$

Multiplicirt man die erste mit $(cb'' - c''b)$, die zweyte mit $(c'b - cb')$ und addirt, so kommt

$$\{(cb'' - c''b)(ab' - a'b) - (cb' - c'b)(ab'' - a''b)\} x -$$
$$\{(cb'' - c''b)(eb' - b'e) - (cb' - c'b)(eb'' - b''e)\} \zeta =$$
$$\tfrac{1}{2}) cb'' - c''b)(Ab' - A'b) - \tfrac{1}{2}(cb' - c'b)(Ab'' - A''b)$$

verfährt man ebenso mit $c', -c, c'', -c$ u. s. w., so leitet man noch folgende Gleichungen ab, wo wir die bekannten Coefficienten in der schon entwickelten mit α, β, γ, in den noch zu entwickelnden, durch dieselben Buchstaben mit Accenten bezeichnen wollen:

$$\alpha x - \beta\zeta = \gamma$$
$$\alpha' y - \beta'\zeta = \gamma'$$
$$\alpha'' z - \beta''\zeta = \gamma$$

alſo

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\gamma + \beta\zeta}{\alpha} \\ y &= \frac{\gamma' + \beta'\zeta}{\alpha'} \\ z &= \frac{\gamma'' + \beta''\zeta}{\alpha''} \end{aligned}\right\} \ldots \text{(D)}$$

Setzen wir dieſe Werthe in die Gleichung

$$\zeta\zeta = xx + yy + zz$$

ſo kommt

$$\zeta\zeta - \frac{m\,\zeta}{n} - \frac{m'}{n} = o \ldots \text{(E)}$$

wo m, m', n bekannt ſind, und zwar iſt

$$m = 2(\gamma\beta\alpha'\alpha'\alpha''\alpha'' + \gamma'\beta'\alpha\alpha\alpha''\alpha'' + \gamma''\beta''\alpha'\alpha'\alpha\alpha)$$

$$m' = \alpha'\alpha'\alpha''\alpha''\gamma\gamma + \alpha\alpha\alpha''\alpha''\gamma'\gamma' + \alpha\alpha\alpha'\alpha'\gamma''\gamma''$$

$$n = \alpha\alpha\alpha'\alpha'\alpha''\alpha'' - (\alpha\alpha\alpha'\alpha' + \alpha\alpha\alpha''\alpha'' + \alpha'\alpha'\alpha''\alpha'')$$

wir haben alſo

$$\zeta = \frac{1}{2n}\{m \pm \mathit{r}\,(4nm' + mm)\}$$

Setzt man dieſen Werth in die Gleichungen (D), ſo erhält man unmittelbar die Coordinaten des Mittelpunkts der geſuchten Kugel:

$$x = \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta}{2\alpha n}\{m \pm \mathit{r}\,(4nm' + mm)\}$$

$$y = \frac{\gamma'}{\alpha'} + \frac{\beta'}{2\alpha' n}\{m \pm \mathit{r}\,(4nm' + mm)\}$$

$$z = \frac{\gamma''}{\alpha''} + \frac{\beta''}{2\alpha'' n}\{m \pm \mathit{r}\,(4nm' + mm)\}$$

Der Halbmeſſer der geſuchten Kugel folgt eben ſo unmittelbar aus ζ, wenn man nur den Halbmeſſer der erſten davon abzieht, oder dazu addirt, nachdem dieſe erſte von innen oder auſsen berührt wird.

No. 1. Der Correſpondence ſur l'Ecole polytechnique enthält geometriſche Unterſuchungen über Berührungen von Kugeln, und eine daraus hergeleitete Auflöſung dieſes Problems. Das Problem von den 3, durch einen 4ten zu berührenden Kreiſen, wird dort auf folgendes Problem zurückgebracht:

„unter allen Kugeln, die 3 gegebene berühren „können, diejenige zu finden, deren Mittelpunkt „mit den Mittelpunkten der andern 3 in einer „Ebene liegt."

Biot, Malus, Berge, Dupuis, Briſſon u. ſ. w., haben ſich mit dieſen Problemen beſchäftigt. Ihre Arbeiten liegen im Mſc. in der Ecole polyt.

In No. 5. pag. 193. iſt eine einfache geometriſche Auflöſung von Cauchy enthalten.

Im Januarſtück dieſes Jahrs (1810), welches ich ſo eben erhalte, iſt noch eine analytiſche Auflöſung von Français, die ich ihrer Eleganz willen, und weil die Correſpondence ſur l'Ecole polyt. wohl in den Händen der wenigſten Leſer iſt, hier mittheile:

Es ſeyen

r, r', r'', r''' die Halbmeſſer der 4 gegebenen Kugeln,

$2a$, $2b$, $2c$ die Entfernungen des Mittelpunkts der erſten Kugel von den Mittelpunkten der andern.

R der Halbmeſſer der geſuchten Kugel,

$\varrho, \varrho', \varrho'', \varrho'''$ die Entfernungen ihres Mittelpunkts von den Mittelpunkten der 4 gegebenen Kugeln,

ſo

ſo hat man

$$\left.\begin{array}{l} R \mp r = \varrho \\ R \mp r' = \varrho' \\ R \mp r'' = \varrho'' \\ R \mp r''' = \varrho''' \end{array}\right\} (1)$$

Wir wollen hier nur die oberen Zeichen betrachten, da die untern eben ſo behandelt werden.

Zieht man die erſte Gleichung von den andern ab, ſo erhält man

$$\begin{array}{l} r - r' = \varrho' - \varrho \\ r - r'' = \varrho'' - \varrho \\ r - r''' = \varrho''' - \varrho \end{array}$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\begin{array}{l} r - r' = 2d \\ r - r'' = 2d' \\ r - r''' = 2d'' \end{array}$$

ſo erhält man

$$\left.\begin{array}{l} \varrho' = \varrho + 2d \\ \varrho'' = \varrho + 2d' \\ \varrho''' = \varrho + 2d'' \end{array}\right\} (2)$$

Man hat aber auch

$$\left.\begin{array}{l} \varrho'\varrho' = \varrho\varrho + 4aa - 4a\varrho \cos(\varrho, a) \\ \varrho''\varrho'' = \varrho\varrho + 4bb - 4b\varrho \cos(\varrho, b) \\ \varrho'''\varrho''' = \varrho\varrho + 4cc - 4c\varrho \cos(\varrho, c) \end{array}\right\} (3)$$

und aus Verbindung der Gleichungen (3) und (2)

$$\left.\begin{array}{l} \varrho\,(a \cos(\varrho, a) + d) = aa - dd \\ \varrho\,(b \cos(\varrho, b) + d') = bb - d'd' \\ \varrho\,(c \cos(\varrho, c) + d'') = cc - d''d'' \end{array}\right\} (4)$$

Dieſe Gleichung ſtellt 3 zweytheilige Hyperboloïden vor, die im Mittelpunkte der erſten Kugel

einen gemeinſchaftlichen Brennpunkt haben, und deren Umdrehungsaxen die Linien ſind, welche den Mittelpunkt dieſer Kugel mit den Mittelpunkten der 3 andern verbinden.

d, d', d'' ſind die halben groſsen Axen dieſer Hyperboloïden, und a, b, c die Entfernungen ihrer Mittelpunkte von den Brennpunkten. Die gemeinſchaftlichen Durchſchnitte ihrer Oberflächen geben die Auflöſung der Aufgabe. Wir werden aber gleich ſehen, daſs man dieſe Hyperboloïden nicht zu conſtruiren braucht, ſondern daſs die Conſtruction der Aufgabe durch Lineal und Zirkel geſchehen kann.

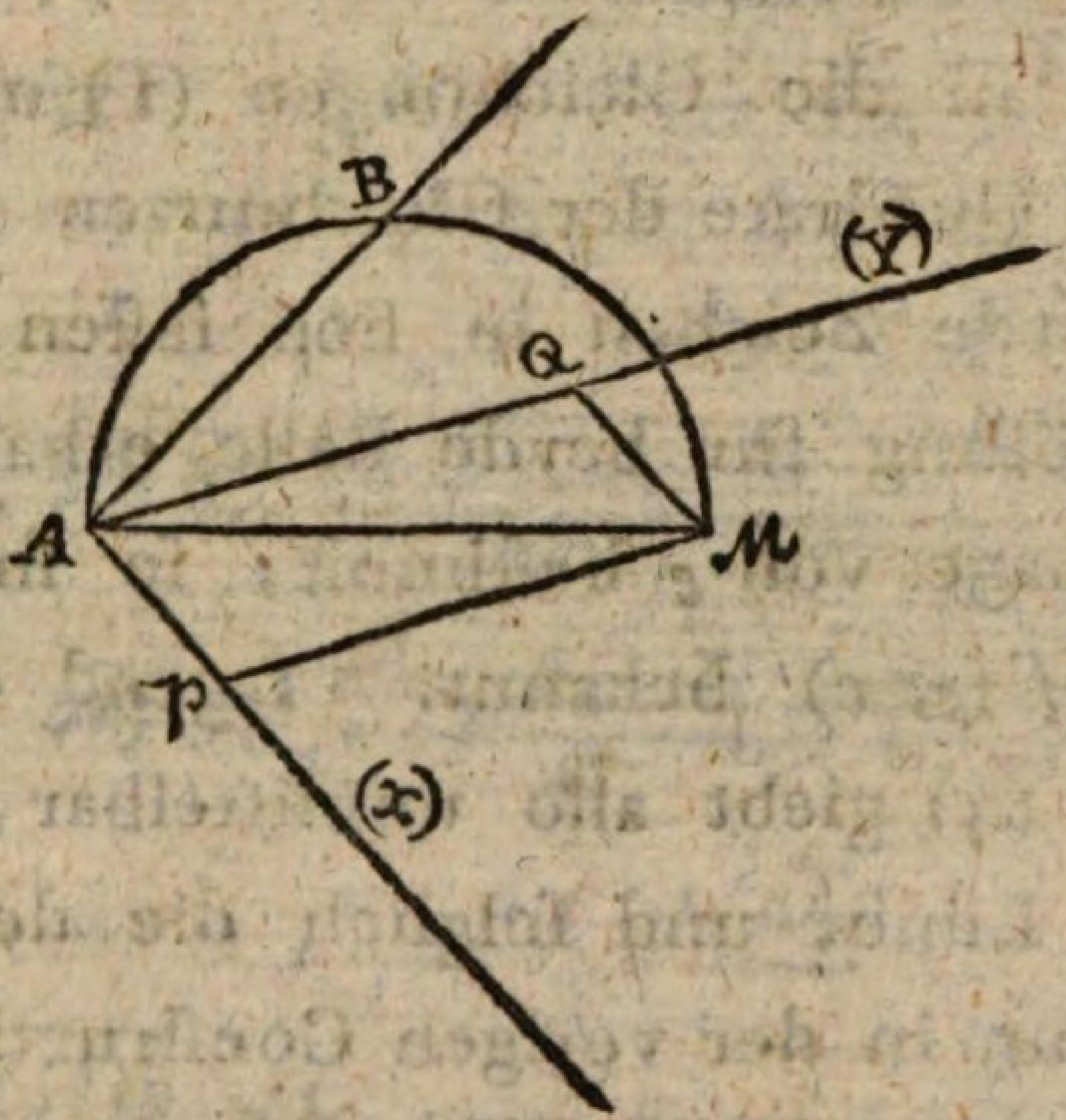
Eliminirt man ϱ aus den Gleichungen (4), ſo erhält man folgende 3, wovon jede aus den beyden andern hergeleitet werden kann,

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{bb-d'd'}{b}\right)\cos(\varrho,a)-\left(\frac{aa-dd}{a}\right)\cos(\varrho,b)\\
&\qquad=\frac{d'}{b}\left(\frac{aa-dd}{a}\right)-\frac{d}{a}\left(\frac{bb-d'd'}{b}\right)\\
&\left(\frac{cc-d''d''}{c}\right)\cos(\varrho,b)-\left(\frac{bb-d'd'}{b}\right)\cos(\varrho,c)\\
&\qquad=\frac{d''}{c}\left(\frac{bb-d'd'}{b}\right)-\frac{d'}{b}\left(\frac{cc-d''d''}{c}\right)\\
&\left(\frac{aa-dd}{a}\right)\cos(\varrho,c)-\left(\frac{cc-d''d''}{c}\right)\cos(\varrho,a)\\
&\qquad=\frac{d}{a}\left(\frac{cc-d''d''}{c}\right)-\frac{d''}{c}\left(\frac{aa-dd}{a}\right)
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Jede dieſer Gleichungen ſtellt einen ſenkrechten Kegel vor, der ſeinen Scheitelpunkt im Mittelpunkt der erſten gegebenen Kugel hat. Ihre Durchſchnitte zu zweyen, geben zwey Linien, wodurch 2 verſchiedene Lagen von ϱ beſtimmt werden. Wir wol-

len die Conſtruction des Kegels, den die erſte Gleichung vorſtellt, andeuten; die beyden andern werden auf ähnliche Weiſe conſtruirt.

Die Linien a, b, c in ihrer gegebenen Lage ſollen die 3 Axen der x, y, z vorſtellen, ſo werden die Coordinaten irgend eines Punktes ihnen reſpective parallel ſeyn.



Auf der Axe der x nehme ich eine Entfernung $AP = \frac{bb - d'd'}{b}$ auf der Axe der y $AQ = \frac{aa - dd}{a}$, welches die Coordinaten des Punktes M ſind. Durch dieſen Punkt und den Urſprung ziehe AM die Axe des geſuchten Kegels. Ueber AM beſchreibe ich einen halben Kreis, in dem ich die Sehne AB abſchneide $= \frac{d'}{b}\left(\frac{aa - dd}{a}\right) - \frac{d}{a}\left(\frac{bb - d'd'}{b}\right)$. Die Linie AB iſt diejenige, welche, indem ſie ſich um AM dreht, den Kegel beſchreibt, der durch die erſte der Gleichungen (5) vorgeſtellt wird.

Die Axen der andern Kegel findet man in der Ebene der *yz*, und in der Ebene des *xz*. Die Linien, durch deren Umdrehung ſie entſtehen, findet man ebenſo wie *AB*, auch kann man die Durchſchnitte zweyer dieſer Kegel leicht durch Lineal und Zirkel erhalten.

Man findet zwey Auflöſungen für die Lage von ϱ, weil die Gleichungen (2) bis auf das Zeichen dieſelben ſind, man mag nun alle obern, oder alle untern Zeichen in die Gleichungen (1) nehmen. Da wir aber die Quadrate der Gleichungen (2) gebrauchten, die beyde Zeichen in ſich faſſen, ſo muſsten wir die Auflöſung für beyde Fälle erhalten.

Iſt die Lage von ϱ beſtimmt, ſo ſind $\cos(\varrho, a)$, $(\cos \varrho, b)$, $\cos(\varrho, c)$ bekannt. Irgend eine von den Gleichungen (4) giebt alſo unmittelbar die abſolute Länge dieſer Linie, und folglich die des Halbmeſſers *R*. Man kann in der vorigen Conſtruction einen der Kegel durch eine Ebene erſetzen, die durch den Urſprung geht, denn da jede Combination der Gleichungen (5) eine von ihnen erſetzen kann, ſo braucht man nur die erſte mit $\frac{d''}{c}$, die zweyte mit $\frac{d,}{a}$ die dritte mit $\frac{d'}{b}$ zu multipliciren, und ſie dann zu addiren, um

$$(6)\ \left\{\begin{aligned} &\cos(\varrho,a)\left\{\frac{d''}{c}\left(\frac{bb-d'd'}{b}\right)-\frac{d'}{b}\left(\frac{cc-d''d''}{c}\right)\right\}\\ +&\cos(\varrho,b)\left\{\frac{d}{a}\left(\frac{cc-d''d''}{c}\right)-\frac{d''}{c}\left(\frac{aa-dd}{a}\right)\right\}\\ +&\cos(\varrho,c)\left\{\frac{d'}{b}\left(\frac{aa-dd}{a}\right)-\frac{d}{a}\left(\frac{bb-d'd'}{b}\right)\right\}\end{aligned}\right\}=0$$

zu erhalten, d. h. die Gleichung einer Ebene, die durch den Urſprung geht, und einen der Kegel (5) erſetzen kann.

Stellt man ſie der Kürze wegen durch

$$l\cos(\varrho, a) + m\cos(\varrho, b) + n\cos(\varrho, c) = 0 \ldots (A)$$

vor, und ſetzt

$$ll + mm + nn + 2lm\cos(a, b) + 2ln\cos(a, c) + 2mn\cos(b, c) = KK$$

ebenſo die Winkel, welche dieſe Ebene mit den 3 coordinirten Ebenen macht $= (A, ab), (A, ac), (A, bc)$, ſo hat man

$$\cos(A, bc) = \frac{l \cdot \sin(a, bc)}{K}$$

$$\cos(A, ac) = \frac{m \cdot \sin(b, ac)}{K}$$

$$\cos(A, ab) = \frac{n \cdot \sin(c, ab)}{K}$$

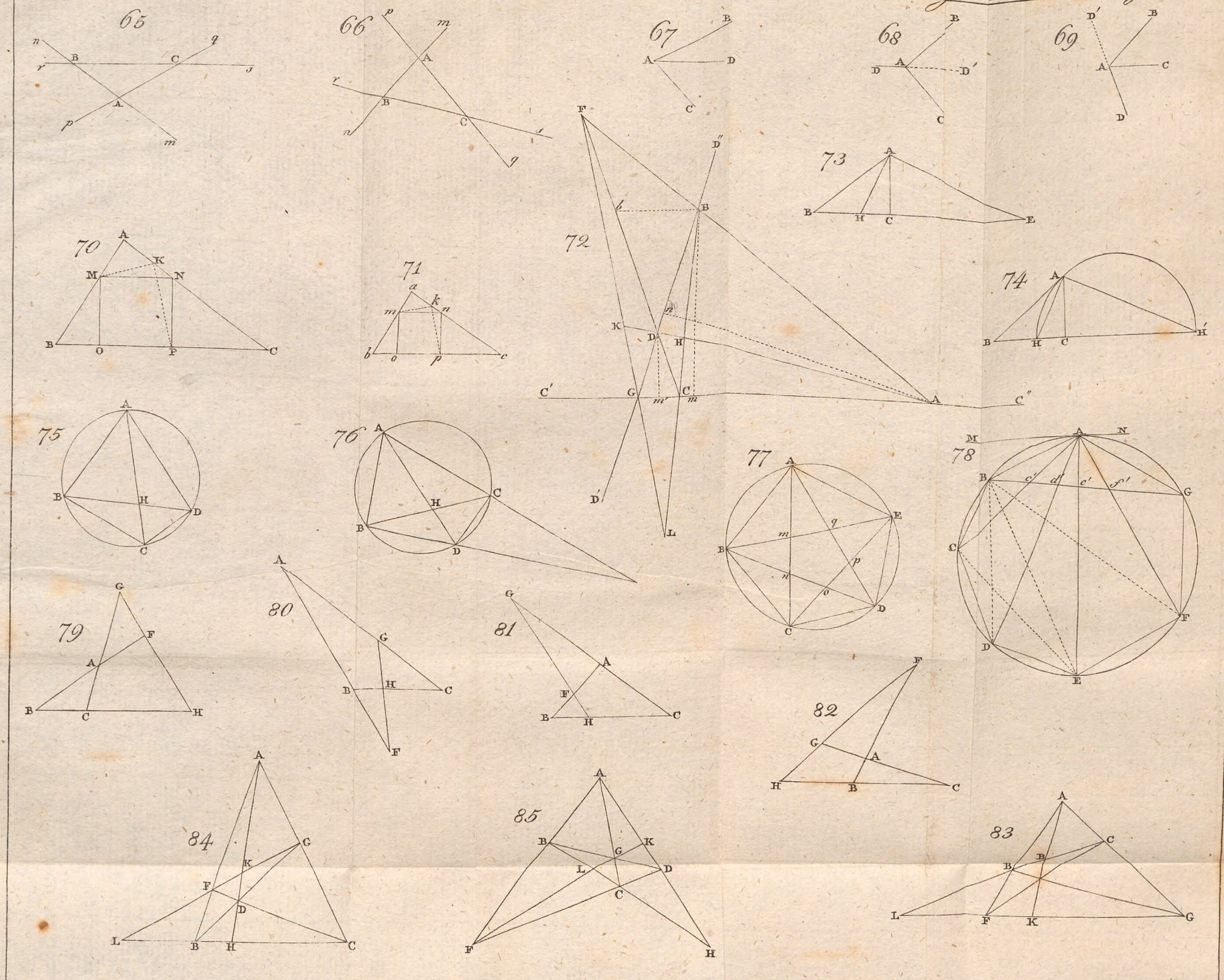
Dieſe Ebene iſt alſo ganz ihrer Lage nach gegeben, und ihr Durchſchnitt mit einem der Kegel (5) giebt die beyden Richtungen von ϱ.

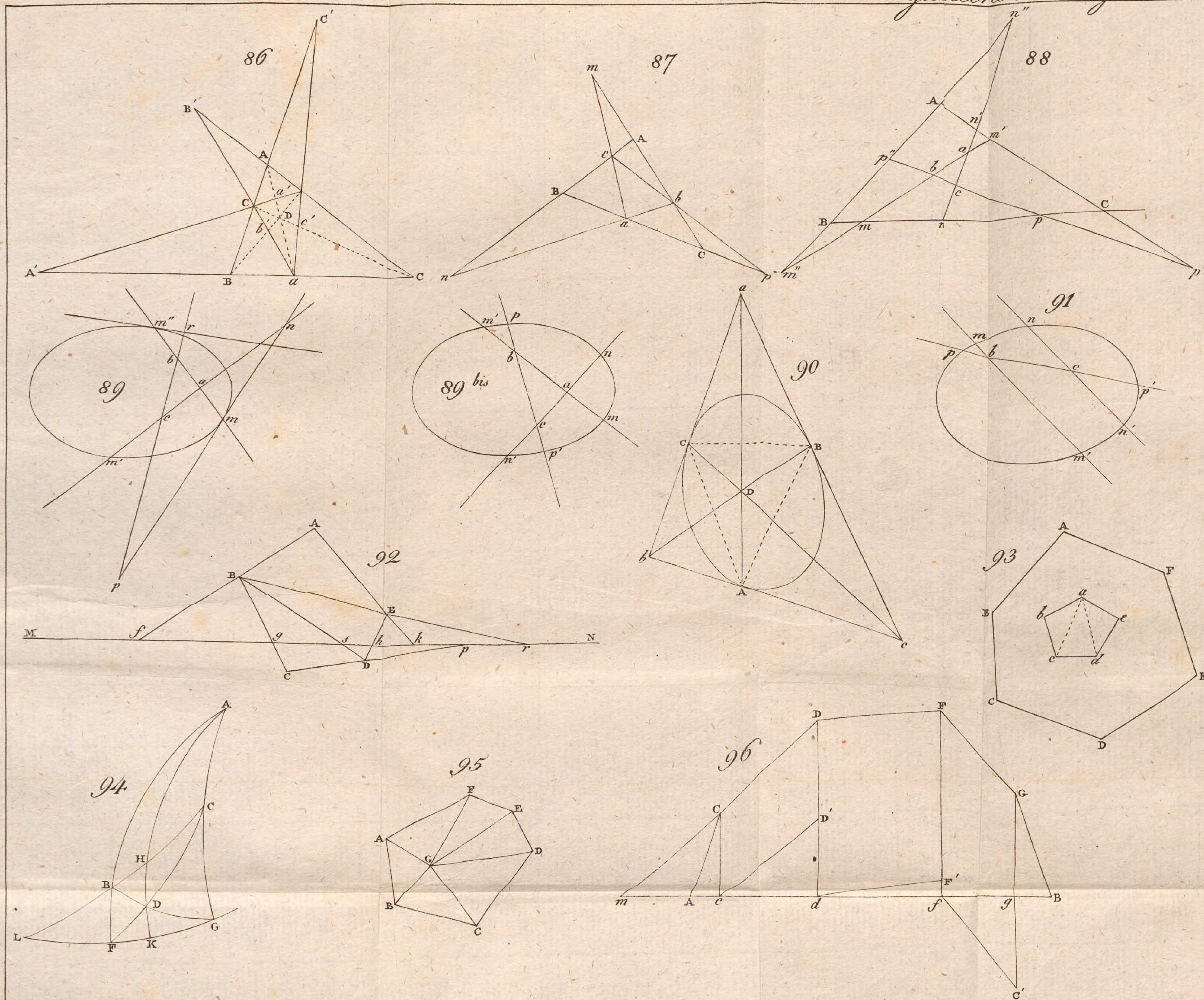
Errata.

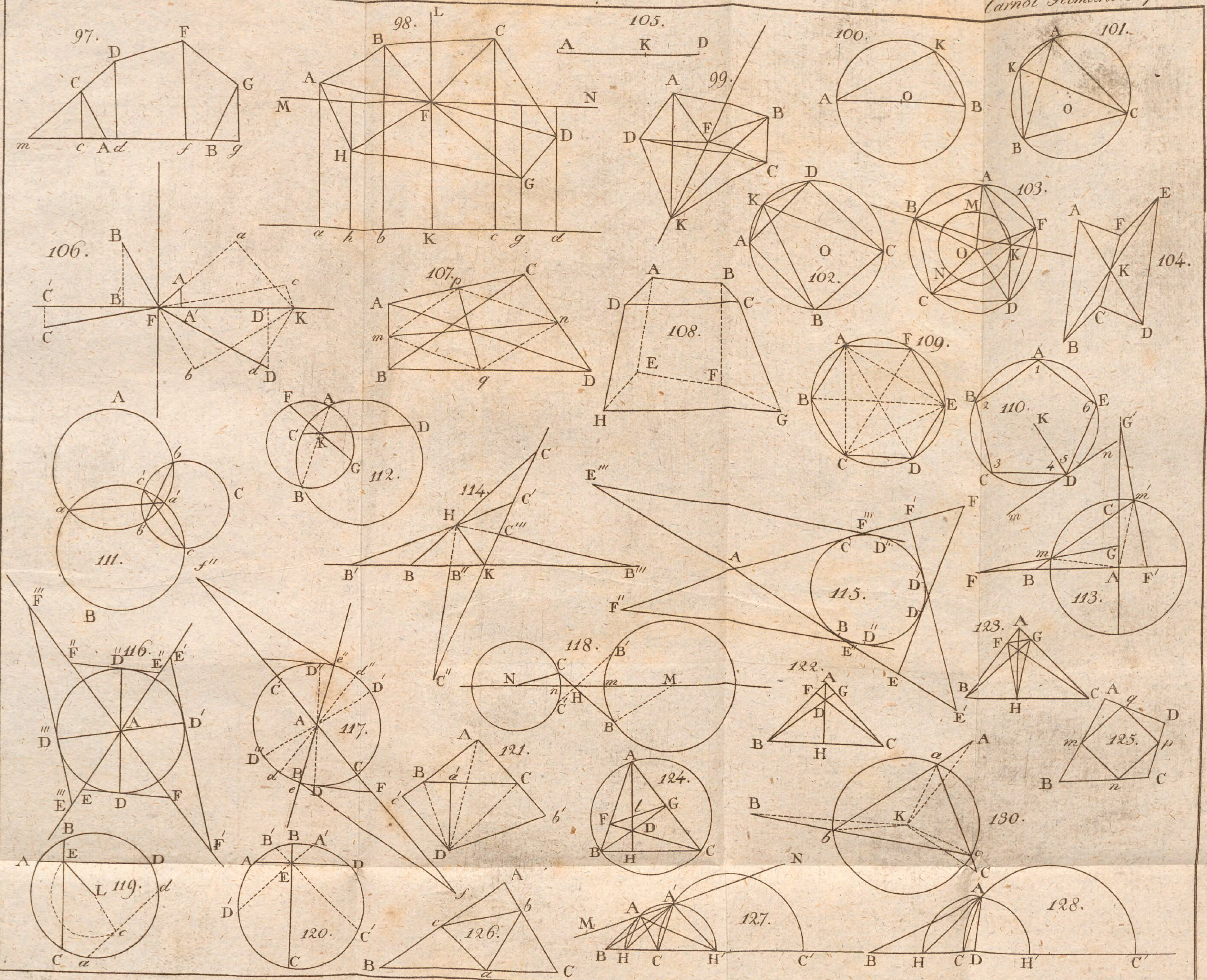
S. 3 Zeile 5. u. statt zu lies in.
7 — 13. o. — Punktionen — Functionen.
12 — 10. o. — den — die.
42 — 6. u. — im — ein.
44 — 13. o. — in — zu
60 — 10. o. muſs das Comma hinter Summe weg.
— 6. u. statt des Products — der Producte.
62 — unten — Fſächeninhalt — Flächeninhalt.
73 — 5. u. — Kugelſchnitt — Kegelſchnitt.
101 ſqq. für entgegengeſetzte Winkel — gegenüberſtehende Winkel.
153 — 1. o. statt Gunſs — Gauſs.
157 — 6. o. — der — die.
168 — 13. o. — grade — gradlinichte.
169 ſq. für gradlinigt — gradlinicht.
189 — 6. u. statt Grade, Linien — grade Linien.
209 — 3. o. — Kugelſchnitt — Kegelſchnitt.
213 — 2. o. — zu — in.
221 — 10. u. — zu — in
247 — 5. o. — in das Franzöſiſche — in das Franzöſiſche überſetzt.
285 ſqq. für Bögen lies Bogen.
324 — 7. u. statt noch leichtere — nach leichten.
330 — 6. u. — zu — in
364 — 10. o. — Recueil der — Recueil des

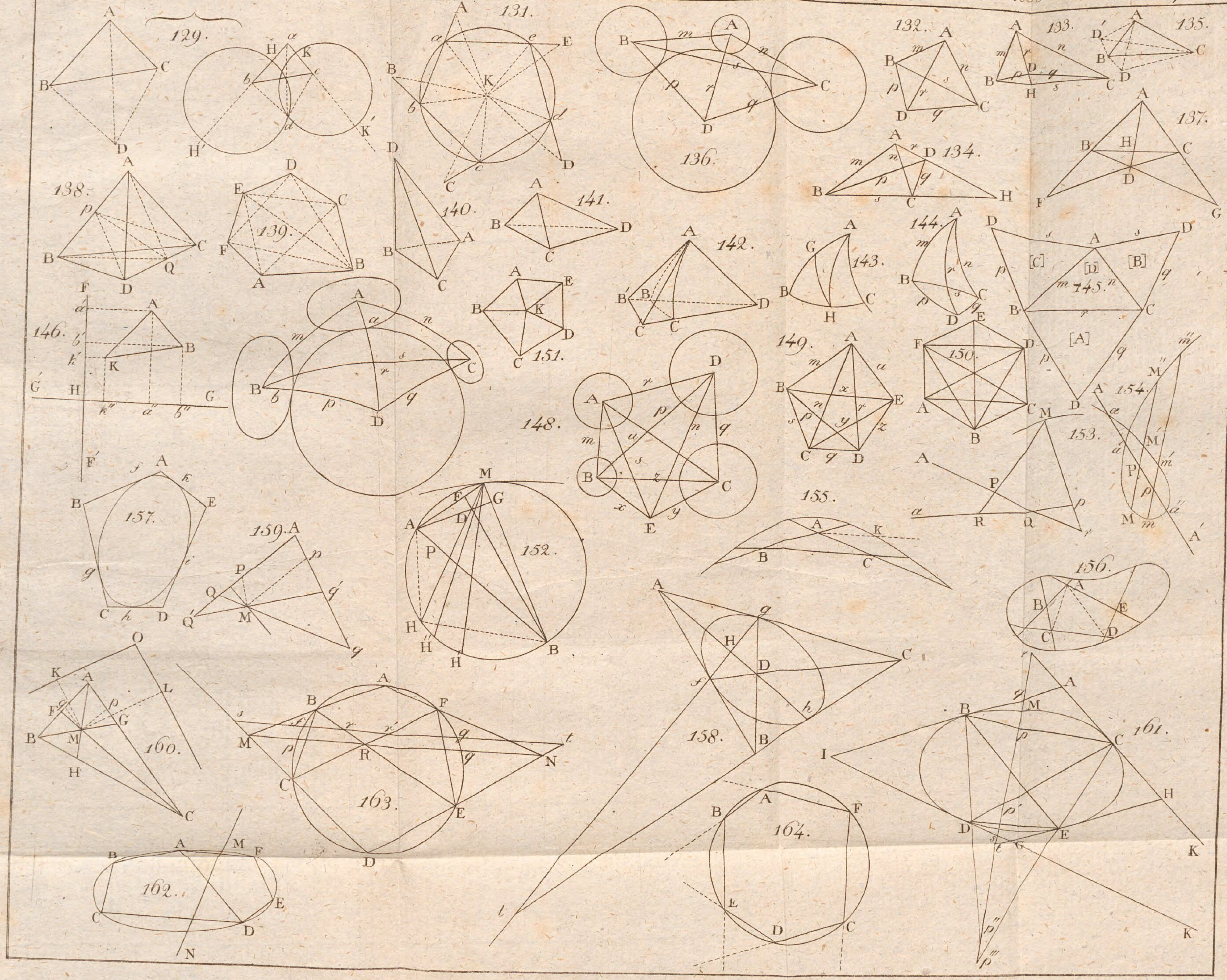
Bayerische Staatsbibliothek München

Leipzig, gedruckt bey J. G. Neubert.

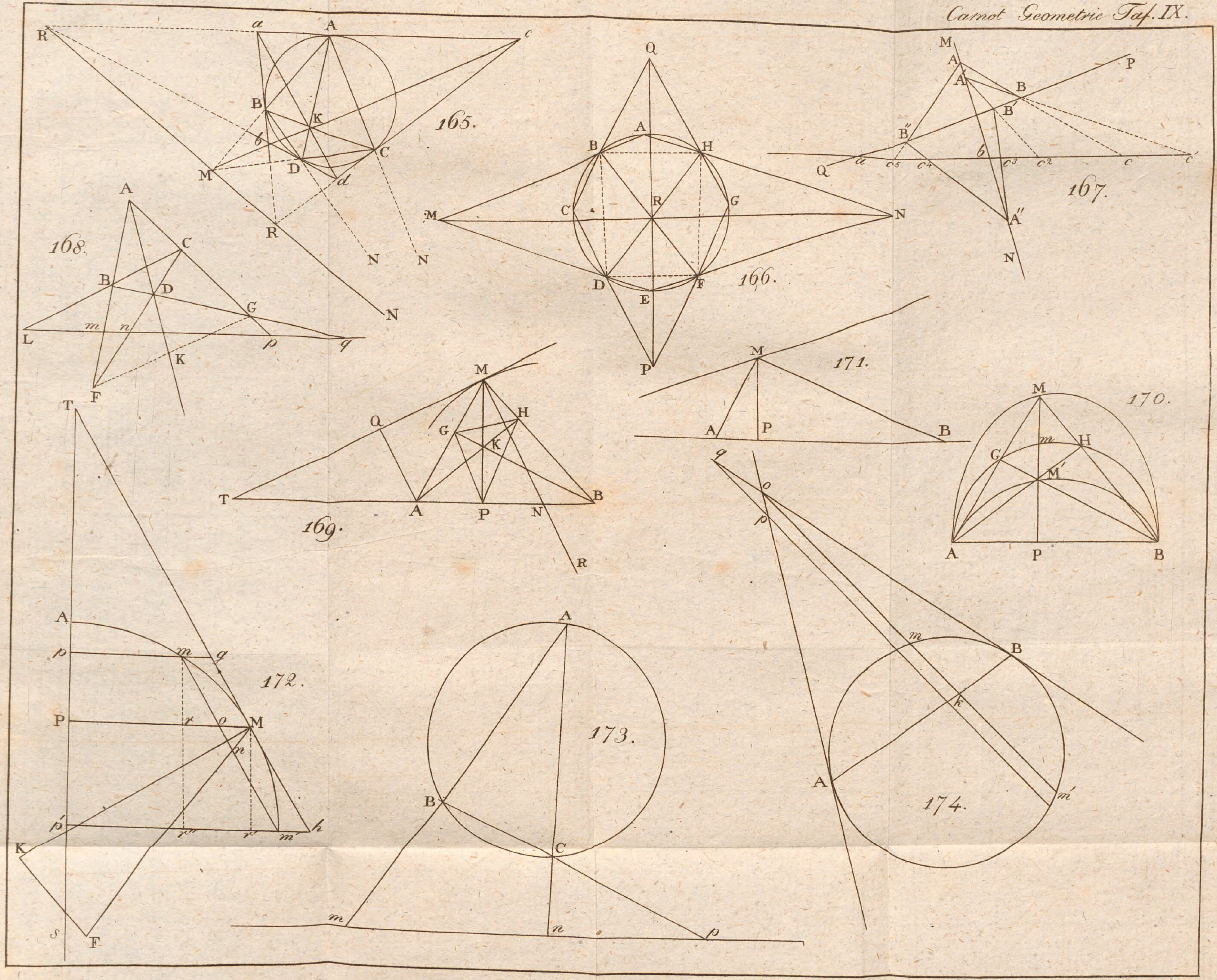

65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85


86
87
88
89
89 bis
90
91
92
93
94
95
96


97.
98.
105.
99.
100.
101.
106.
107.
108.
102.
103.
104.
109.
110.
111.
112.
114.
115.
113.
116.
117.
118.
122.
123.
125.
121.
124.
130.
119.
120.
126.
127.
128.


129.
131.
132.
133.
134.
135.
136.
137.
138.
139.
140.
141.
142.
143.
144.
145.
146.
148.
149.
150.
151.
152.
153.
154.
155.
156.
157.
158.
159.
160.
161.
162.
163.
164.

Carnot Geometrie Taf. IX.



Zum Anhange.

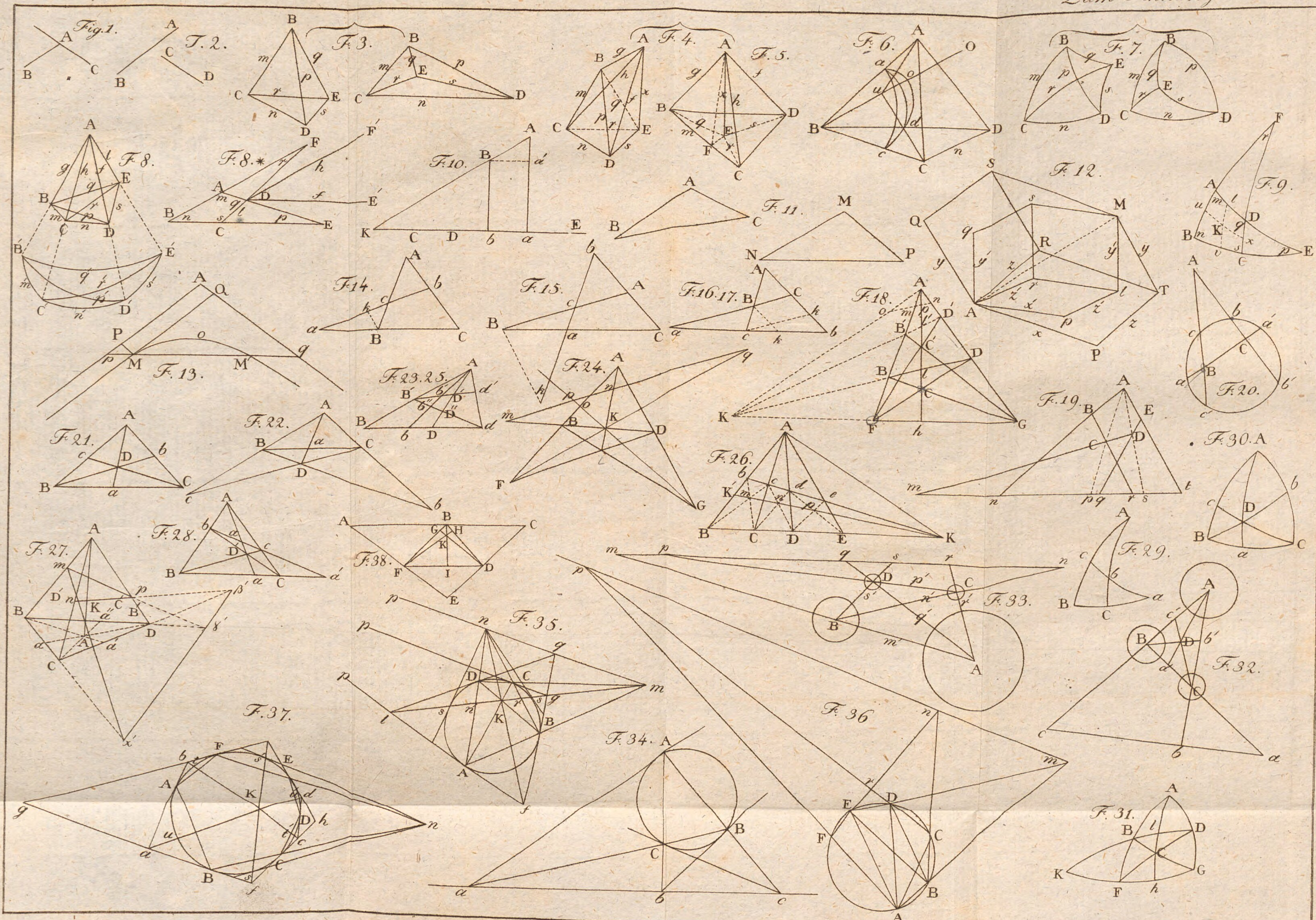


Fig. 1.
F. 2.
F. 3.
F. 4.
F. 5.
F. 6.
F. 7.
F. 8.
F. 8.*
F. 9.
F. 10.
F. 11.
F. 12.
F. 13.
F. 14.
F. 15.
F. 16. 17.
F. 18.
F. 19.
F. 20.
F. 21.
F. 22.
F. 23. 25.
F. 24.
F. 26.
F. 27.
F. 28.
F. 29.
F. 30.
F. 31.
F. 32.
F. 33.
F. 34.
F. 35.
F. 36.
F. 37.
F. 38.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Carnot, Lazare,

Geometrie der Stellung oder über die Anwendung der Analysis auf Geometrie

Bd.: 2

Altona 1810

Math.p. 73 b-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081582-2